Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2016-08-22, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER4, TERE

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2016-08-22

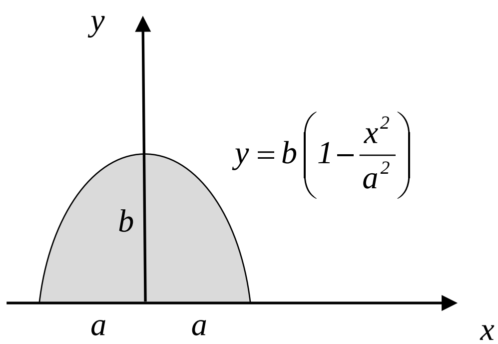
Teoridel:

1)
Masscentrum för en kropp definieras som bekant enligt nedan:

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho \, dV}{\int_V \rho \, dV}$$

Betrakta en tunn homogen plåt med tjockleken t och där arean begränsas av kurvan $y = b\,(1 - x^2/a^2)$ samt av x-axeln enligt figuren nedan. Visa att masscentrums läge i y-led ges av:

$$y_G = \frac{2}{5}b$$ (1p)



2)
Den kinetiska energin som en partikel har ges som bekant av $T = \frac{1}{2}mv^2$.

Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, och visa att

$$U = T_2 - T_1$$

där U är uträttat arbete längs en bankurva från läge $\boldsymbol{r}_1$ till $\boldsymbol{r}_2$, dvs

$$U = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \sum \boldsymbol{F} \circ d\boldsymbol{r}$$

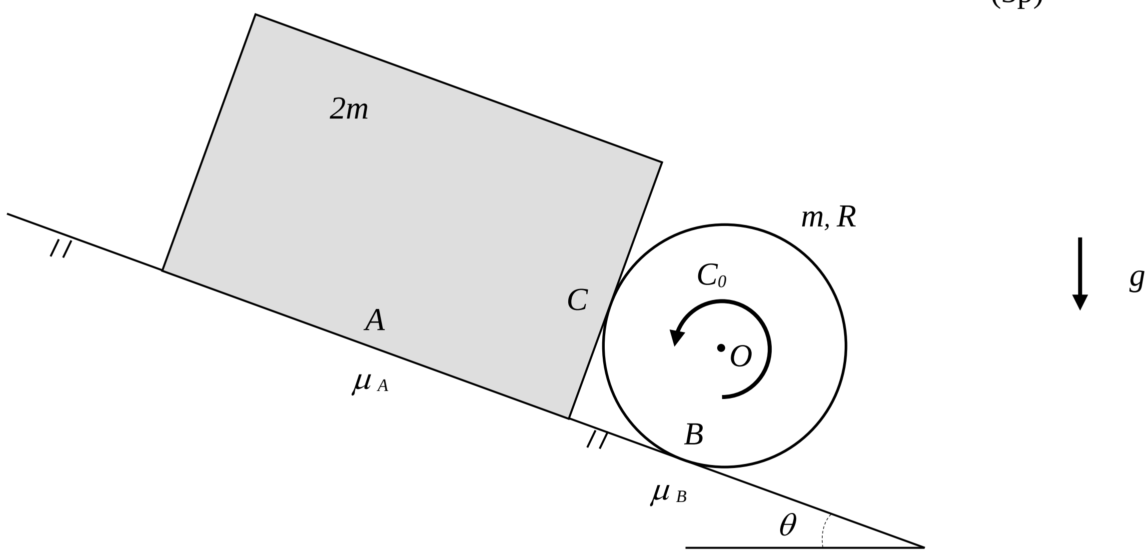
(2p)

Ledning: $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \circ \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{v})$ där $\boldsymbol{v}$ är partikelns hastighetsvektor.

Problemdel:

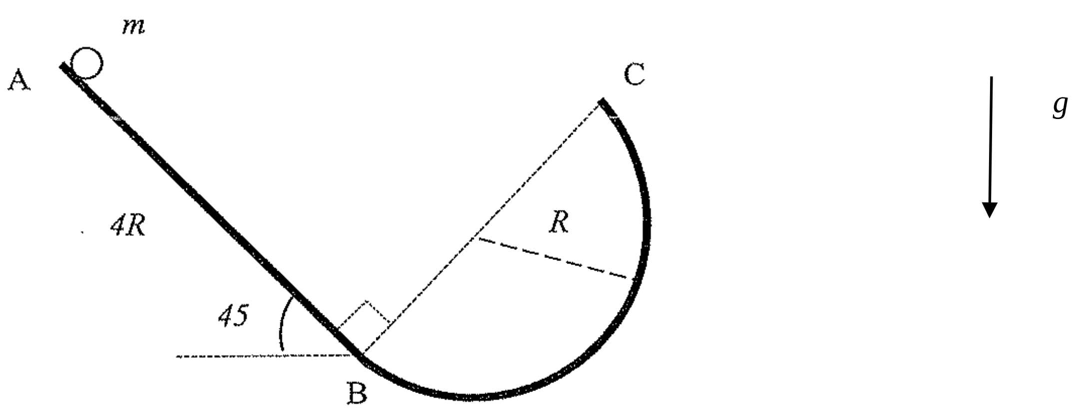
3)
En rulle med massan m och radien R och ett rätblock med massan $2m$ är placerade på ett lutande plan enligt figur. Rullen belastas med ett kraftparsmoment C_0 moturs och ligger an mot rätblocket vid C. Den statiska friktionskoefficienten vid kontakten mellan blocket och planet vid A har värdet $\mu_A = 1/\sqrt{3}$ och mellan rullen och planet vid B är värdet $\mu_B = \sqrt{3}\,/\,2$. Kontakten vid C är helt friktionsfri. För vilka värden på kraftparsmomentet C_0 befinner sig båda kropparna i fortvarig vila? Ange ett intervall med en undre och övre gräns. Det får antas att rätblockets dimensioner är sådana att det inte kan tippa och lutningsvinkeln $\theta = 30^o$.

(3p)

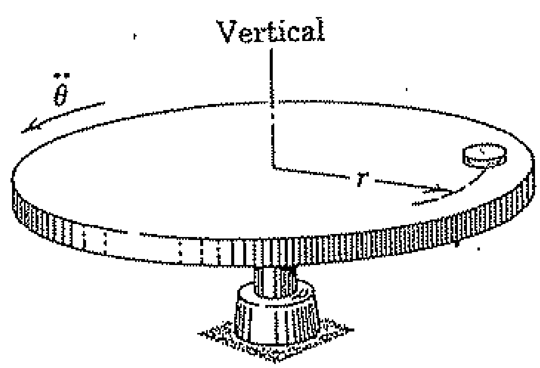


4)
En fix skena ABC består av en rak del AB med längden 4R och en halvcirkelformad del BC med radien *R*. Delen AB bildar vinkeln 45^o mot horisontalen och punkterna A, B och C ligger i samma vertikalplan. En partikel med massan *m* släpps från A utan begynnelsehastighet och glider utan friktion längs skenan och slungas ut vid C.

a) Beräkna partikelns maximala fart under rörelsen (2p)
b) Beräkna normalkraften från skenan på partikeln i det läge då farten är maximal (1p)

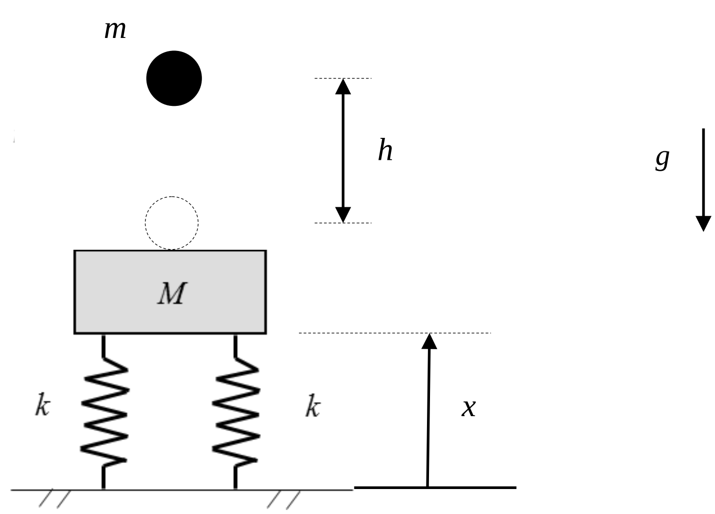


5)
Ett litet mynt är placerat på en sträv horisontell skiva enligt figuren, där *r* är avståndet till myntet från skivans mittpunkt. Skivan kan rotera kring en fix vertikal axel. Om skivan startar från vila vid tiden *t=0* och ges en konstant vinkelacceleration $\ddot{\theta} = \alpha$, beräkna den tidpunkt *t** då myntet börjar glida på skivan. Den statiska friktionskoefficienten mellan myntet och skivan är μ_s. (3p)



6)
En platta med massan M är placerad på två fjädrar med fjäderkonstanten k vardera. Fjädrarnas ospända längd är L_0. Plattan befinner sig i vila i sitt statiska jämviktsläge när den träffas av en boll enligt figur. Stöten mellan bollen och plattan är fullständigt plastisk, dvs bollen fastnar i plattan efter stöten. Bollens massa är m och har släppts från vila från höjden h ovanför plattan. Beräkna fjädrarnas längd x som funktion av tiden t för rörelsen som uppstår för massan $m+M$ efter stöten.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)
$$Y_G = \frac{\int_V y\,\rho\,dV}{\int_V \rho\,dV} \,; \quad dV = t\,dA \,, \quad \rho, t = \text{konst}$$

ger

$$Y_G = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} \,; \quad dA = dx\,dy$$

$$\int_A y\,dA = \int_A y\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left[\int_0^{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} y\,dy\right]dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{1}{2} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx = \frac{8}{15} a b^2 \quad //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left[\int_0^{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} dy\right]dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} a b \quad //$$

$$Y_G = \frac{\frac{8}{15} a b^2}{\frac{4}{3} a b} = \frac{2}{5} b \quad \text{V.S.V.}$$

2)

$$U = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \Sigma \bar{F} \circ d\bar{r} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} m\bar{a} \circ d\bar{r} \overset{\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}}{=}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\bar{v}}{dt} \circ \frac{d\bar{r}}{dt} \, dt \overset{\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}}{=} \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\bar{v}}{dt} \circ \bar{v} \, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\bar{v} \circ \bar{v}) \, dt = \frac{m}{2} \left[\bar{v} \circ \bar{v} \right]_{t_1}^{t_2}$$

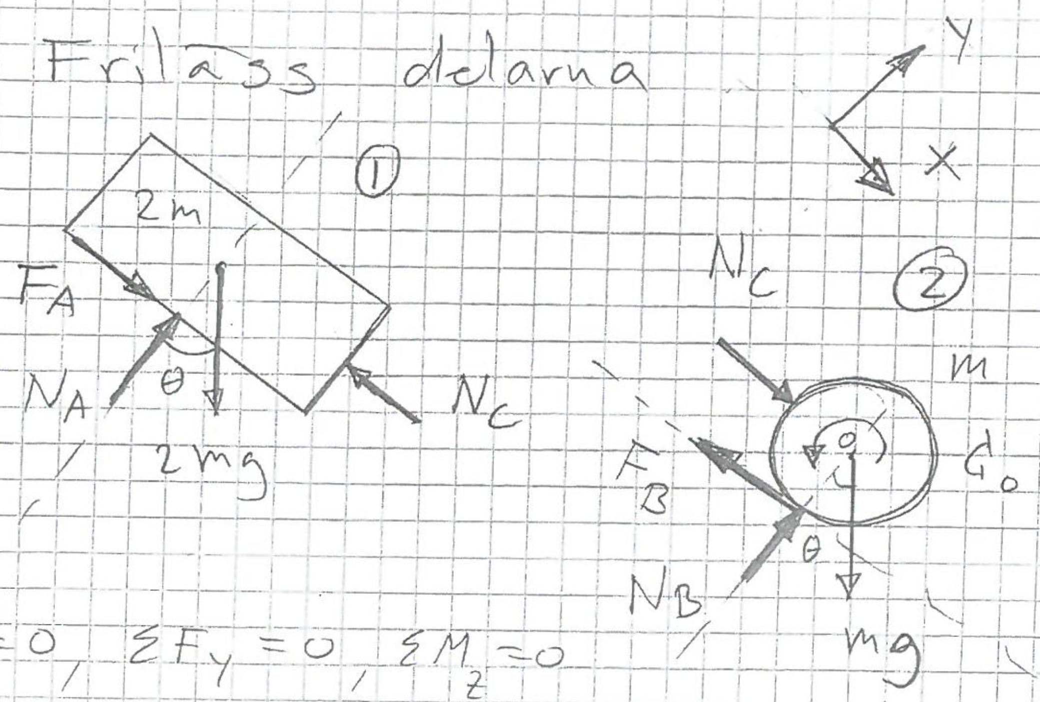
$$\downarrow \; v = |\bar{v}|$$

$$= \frac{m}{2} \left[|\bar{v}|^2 \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} m \left[v^2 \right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{1}{2} m v^2(t_2) - \frac{1}{2} m v^2(t_1) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$= T_2 - T_1$$ v. s. v.

3) Frilägg delarna



$\Sigma F_x = 0, \; \Sigma F_y = 0, \; \Sigma M_z = 0$

ger

1 $\searrow$ $2mg\sin\theta + F_A - N_C = 0$ (1)

$\nearrow$ $N_A - 2mg\cos\theta = 0$ (2)

2 $\searrow$ $mg\sin\theta + N_C - F_B = 0$ (3)

$\nearrow$ $N_B - mg\cos\theta = 0$ (4)

$\circlearrowleft O$ $C_0 - F_B \cdot R = 0$ (5)

$\theta = 30^\circ, \; \mu_A = \frac{1}{\sqrt{3}}, \; \mu_B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \; \mu_C = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}; \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) -- (5) ger $N_C = \frac{G_0}{R} - \frac{1}{2} mg$ och

$$\begin{cases} F_A = \frac{G_0}{R} - \frac{3}{2} mg \\ N_A = \sqrt{3}\, mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_B = \frac{G_0}{R} \\ N_B = mg \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

<u>Villkor:</u> $|F_A| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |N_A|$; $N_A \geq 0$ (ok)

$|F_B| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |N_B|$; $N_B \geq 0$ (ok)

$N_C \geq 0$ (kontakt vid C)

ger A: $\left| \frac{G_0}{R} - \frac{3}{2} mg \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}\, mg$ (*)

B: $\frac{G_0}{R} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot mg \frac{\sqrt{3}}{2}$ (**)

C: $\frac{G_0}{R} - \frac{1}{2} mg \geq 0$ (***)

(*) ger $\pm\left(\frac{G_0}{R} - \frac{3}{2}mg\right) \le mg$ dvs

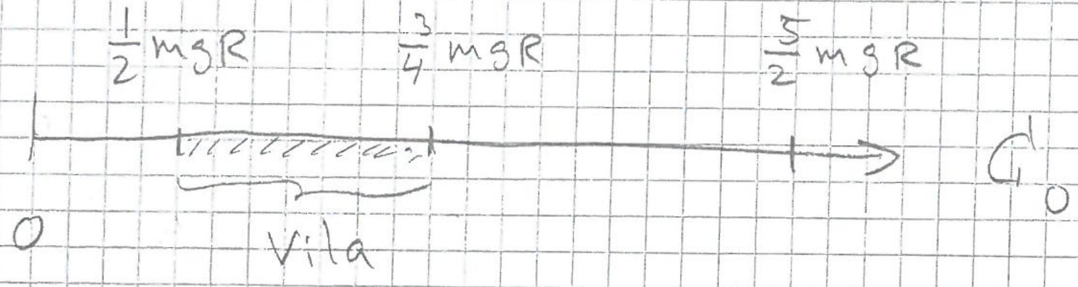
$\boxed{A:}$ $G_0 \le \frac{5}{2}mgR$ // ; $G_0 \ge \frac{1}{2}mgR$ //

(**) ger

$\boxed{B:}$ $G_0 \le \frac{3}{4}mgR$ //

(***) ger

$\boxed{C:}$ $G_0 \ge \frac{1}{2}mgR$ //



Således: $\frac{1}{2}mgR \le G_0 \le \frac{3}{4}mgR$ //

4)

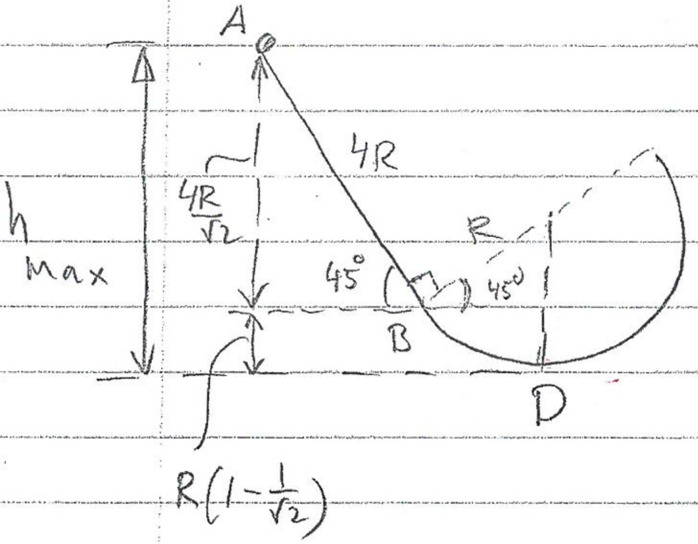
b) Använd $U = \Delta T + \Delta V_g$

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$v^2 = 2gh \quad ; \quad v = \sqrt{2gh}$$

Farten V_{max} fås då $h = h_{max}$

dvs. då kulan når lägsta punkten D.



$$h_{max} = 4R\frac{1}{\sqrt{2}} + R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ger $V_{max} = \sqrt{2gR\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 1\right)}$ vid D

Frilägg vid läge D

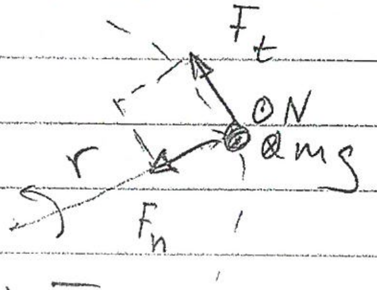
$\Sigma F = m\bar{a}$ ger $\uparrow$ $N - mg = m\frac{v^2}{R}$ där $v = V_{max}$

dvs $N = 3mg(1+\sqrt{2})$ //

5)

3) Friläggs myntet (cirkelbana)

Kinematik (n-t)



$a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta} = r\cdot\alpha$ (1)

$a_n = \frac{v^2}{r} = r\dot{\theta}^2 = r\omega^2$ (2)

$\sum \bar{F} = m\bar{a}$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$;

$\bar{e}_t$: $F_t = ma_t$ (4)

$\int \alpha\, dt = \int d\omega$ ger

$\bar{e}_n$: $F_n = ma_n$ (5)

$\omega = \alpha t + C_1$

$\bar{e}_z$: $N - mg = 0$ (6)

$\omega = 0$ då $t = 0$, dvs $C_1 = 0$

$\omega = \alpha t$ (3)

(1)-(5) ger

$F_t = mr\alpha$; $F_n = mr\alpha^2 t^2$

$|\bar{F}| = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = mr\alpha\sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$ (7)

Villkor $|\bar{F}| \leq \mu_s |\bar{N}|$ ger via (6)

$mr\alpha\sqrt{1+\alpha^2 t^4} = \mu_s mg$ vid gränsfallet för glidning

ger $t^* = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\left(\frac{\mu_s g}{r\alpha}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{4}}$

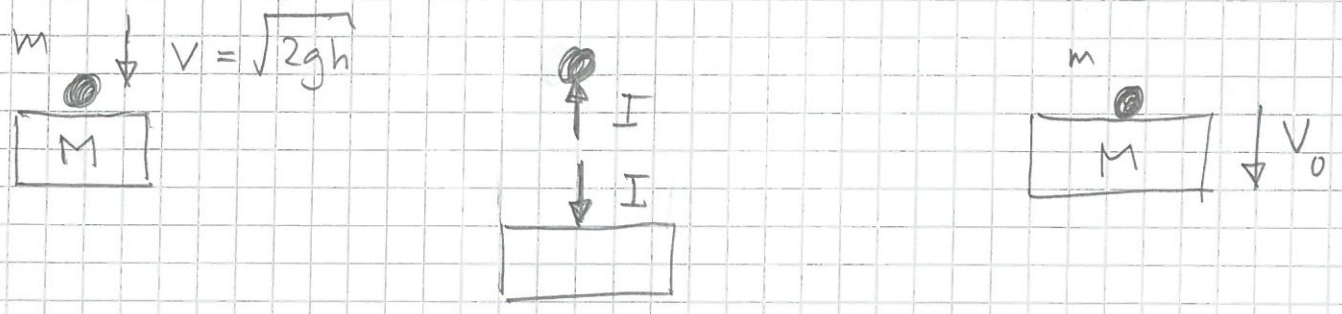
6)

<u>Innan stöten:</u> Fritt fall $0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$

ger $V = \sqrt{2gh}$

<u>Stöten:</u>

Före Under Efter

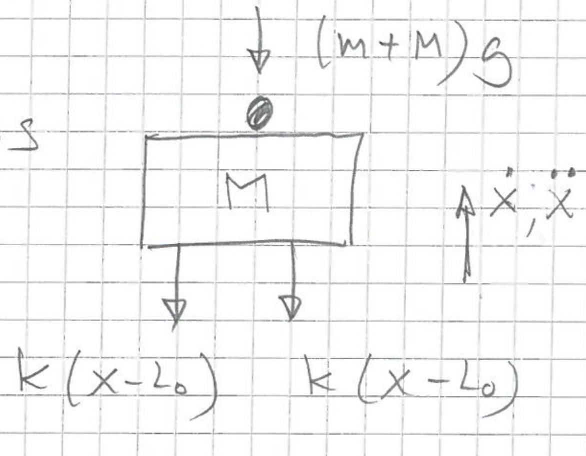


$\bar{I}_S = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ för systemet $m+M$.

$\downarrow \quad 0 = (m+M)V_0 - mV$ ger

$$V_0 = m\frac{V}{m+M} = m\frac{\sqrt{2gh}}{m+M} \quad //$$

<u>Svängningen:</u> Frilägg



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\uparrow \quad -2k(x-L_0) - (m+M)g =$

$= (m+M)\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{(m+M)}x = \frac{2k}{m+M}L_0 - g \qquad \text{Ident. med}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 \qquad \text{ger}$$

$$\zeta = 0, \quad \omega_n^2 = \frac{2k}{m+M}, \quad x_1 = L_0 - \frac{(m+M)g}{2k}$$

Således: $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m+M}}$ och

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + L_0 - \frac{(m+M)g}{2k}$$

B.V. då $t=0$ (omedelbart efter stöten)

$$\begin{cases} x(0) = L_0 - \frac{Mg}{2k} & \text{(statiska läget för } M\text{)} \\ \dot{x}(0) = -V_0 \end{cases}$$

ger $A = \frac{mg}{2k}$, $B = -V_0\sqrt{\frac{(m+M)}{2k}}$

Dvs:

$$x(t) = \frac{mg}{2k}\cos\omega_n t - V_0\sqrt{\frac{m+M}{2k}}\sin\omega_n t + L_0 - \frac{(m+M)g}{2k} \quad //$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m+M}}$

$$V_0 = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$$