Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2016-01-05, kl 8.00-13.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: ___________

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 9.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2016-01-05

Teoridel:

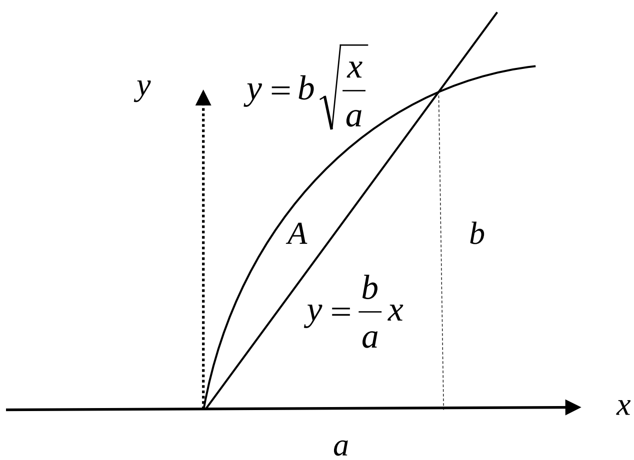
1)
Masscentrum för en kropp definieras som bekant

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV}, \text{ där } \rho = \text{densiteten}$$

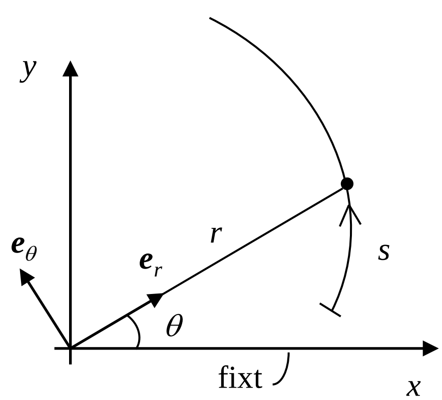
Visa att masscentrums läge i y-led ges av $y_G = \dfrac{b}{2}$ för en tunn homogen plåt med tjockleken t

och arean A som begränsas av kurvan $y = b\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ samt linjen $y = \dfrac{b}{a}x$ enligt figur.

(1p)



2)
En partikels bana i polära koordinater ges av $r = r(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där t är tiden, se figur.



Visa att partikelns hastighet $\boldsymbol{v}$ och acceleration $\boldsymbol{a}$ i polära koordinater kan skrivas

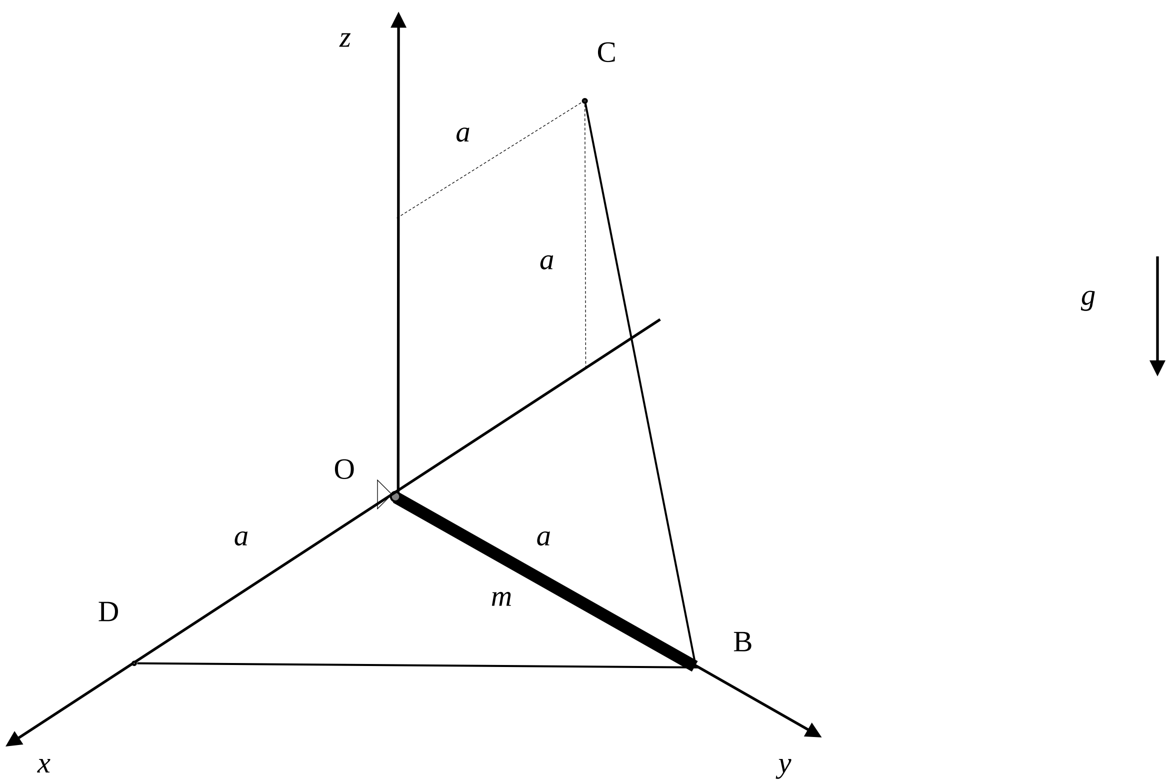
$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$$
$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

(2p)

Problemdel:

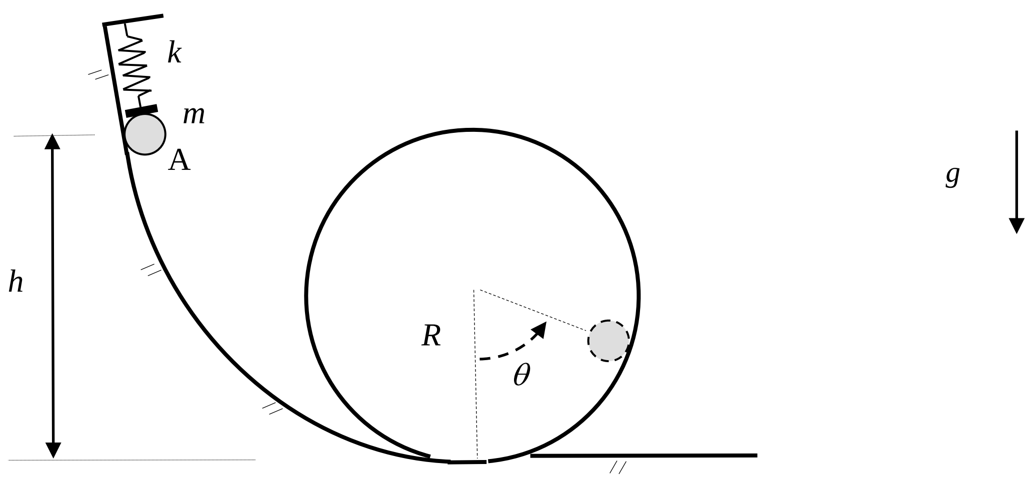
3)
En homogen stång OB med massan *m* och längden *a* befinner sig i jämvikt då den är orienterad längs *y*-axeln. Stångens ena ände O är fäst i en friktionsfri kulled och i den andra änden B är två snören BC och BD fäst som är fixerat vid C respektive D i *xz*-planet. Beräkna dragkraften i snöret BC och BD. Svara med storleken (beloppet). Geometri enligt figuren.

(3p)



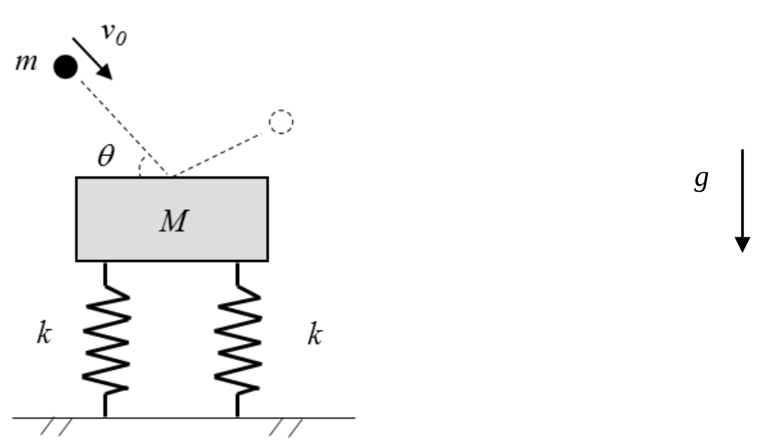
4)
En partikel A med massan *m* skjuts iväg från vila med hjälp av en fjäder med fjäderkonstanten *k* och deformationen (ihoptryckningen) δ då den befinner sig på höjden *h* ovanför horisontalen. Partikeln följer sedan en skena som efter ett tag övergår till en cirkulär del med radien *R* enligt figur. Låt $k = 9mg / R$ och $h = 2R$ och försumma friktionen.

a) Beräkna normalkraften från banan på partikeln som funktion av vinkeln θ (svaret får innehålla *m*, *g*, *R* och δ). (2p)
b) Hur stort måste δ minst vara för att partikeln ska klara ett helt varv utan att lämna cirkelbanan. (1p)



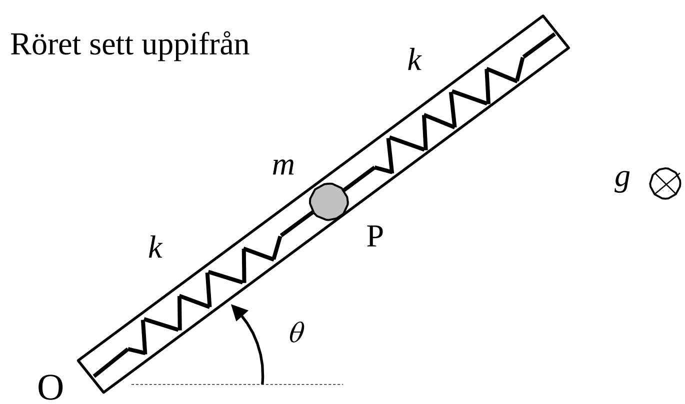
5)
En glatt platta med massan *M* är placerad på två fjädrar med fjäderkonstanten *k* vardera. Plattan befinner sig i vila i sitt statiska jämviktsläge när den träffas av en boll med hastigheten v_0 i riktningen $\theta = 45^o$ enligt figur. Bollens massa är *m* och stöttalet mellan bollen och plattan är $e = 1/2$. Beräkna fjädrarnas maximala deformation för rörelsen som uppstår efter stöten.

(3p)



6)
En partikel P med massan m kan röra sig i ett horisontellt rör som roterar runt en vertikal axel genom den fixa änden O med konstant vinkelhastighet $\dot{\theta} = \omega$. I partikeln och i rörets båda ändar är två lika fjädrar med fjäderkonstanten k fästa enligt figur. Partikeln släpps fri utan hastighet <u>relativt röret</u> då båda fjädrarna har den ospända längden L_0 vardera. Man observerar att partikeln genomför en svängningsrörelse inuti röret. Försumma friktionen och partikelns storlek och låt $\omega < \sqrt{2k/m}$. Beräkna:

a) avståndet $r = OP$ som funktion av tiden t efter frisläppandet, (2p)
b) normalkraften från röret på partikeln som funktion av tiden t. (1p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1) $$Y_G = \frac{\int_V y\,\rho\,dV}{\int_V \rho\,dV}\,, \quad \rho = \text{konst}\,, \quad t = \text{konst.}$$

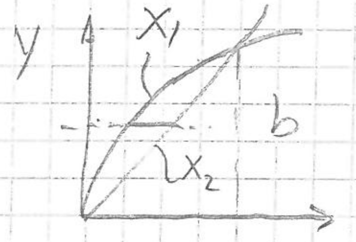
$$dV = t \cdot dA$$

$$Y_G = \frac{\int_V y\,\rho \cdot t\,dA}{\int_V \rho \cdot t\,dA} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}$$

$dxdy$-element

$dA = dx\,dy$

$$\int_A y\,dA = \int_A y\,dx\,dy = \int_0^b \left[\int_{x_1}^{x_2} dx\right] y\,dy$$



$$x_1 = \frac{a}{b^2}\,y^2$$

$$x_2 = \frac{a}{b}\,y$$

$$\int_A y\,dA = \int_0^b \left[\int_{\frac{a}{b^2}y^2}^{\frac{a}{b}y} dx\right] y\,dy = \int_0^b \Big[\,x\,\Big]_{\frac{a}{b^2}y^2}^{\frac{a}{b}y} y\,dy$$

$$= \int_0^b \left(\frac{a}{b}y - \frac{a}{b^2}y^2\right) y\,dy = \int_0^b \left(\frac{a}{b}y^2 - \frac{a}{b^2}y^3\right) dy$$

$$= \frac{1}{12}\,a\,b^2 \quad //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_0^b \left[\int_{\frac{a}{b^2}y^2}^{\frac{a}{b}y} dx\right] dy = \int_0^b \left(\frac{a}{b}y - \frac{a}{b^2}y^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{6}\,a\,b \quad // \qquad Y_G = \frac{1}{12}ab^2 \Big/ \frac{1}{6}ab = \underline{\underline{\frac{1}{2}\,b}} \quad \text{V.S.V.}$$

2b)

$$\bar{r} = r\bar{e}_r \; ; \; \bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r$$

$$\begin{cases} \bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y \\ \bar{e}_\theta = -\sin\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\,\bar{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\,\bar{e}_y = \dot{\theta}\bar{e}_\theta \\ \dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta}\cos\theta\,\bar{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta\,\bar{e}_y = -\dot{\theta}\bar{e}_r \end{cases}$$

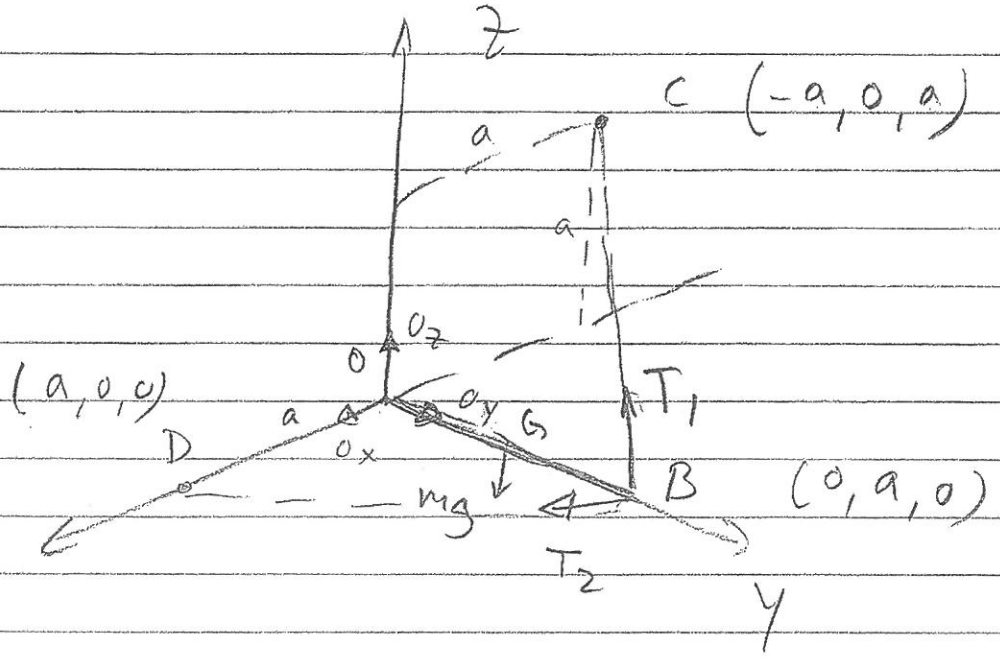
ger $\underline{\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta}$ V.S.V

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{r}\bar{e}_r + \dot{r}\dot{\bar{e}}_r + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\bar{e}}_\theta$$

ger $\underline{\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{e}_\theta}$

V.S.V

3)



$$\bar{T}_1 = T_1 \bar{e}_{BC} = T_1 (-\bar{e}_x - \bar{e}_y + \bar{e}_z) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\bar{T}_2 = T_2 \bar{e}_{BD} = T_2 (\bar{e}_x - \bar{e}_y) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$m\bar{g} = -mg\bar{e}_z$$

$\bar{M}_0 = \bar{0}$ ger $\overline{OG} \times m\bar{g} + \overline{OB} \times \bar{T}_1 + \overline{OB} \times \bar{T}_2 = \bar{0}$

$\overline{OG} = \frac{a}{2}\bar{e}_y$; $\overline{OB} = a\bar{e}_y$

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & a & 0 \\ \frac{-T_1}{\sqrt{3}} & \frac{-T_1}{\sqrt{3}} & \frac{T_1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & a & 0 \\ \frac{T_2}{\sqrt{2}} & -\frac{T_2}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \bar{0}$$

$$\left(-mg\frac{a}{2} + a\frac{T_1}{\sqrt{3}}\right)\bar{e}_x + 0\cdot\bar{e}_y +$$

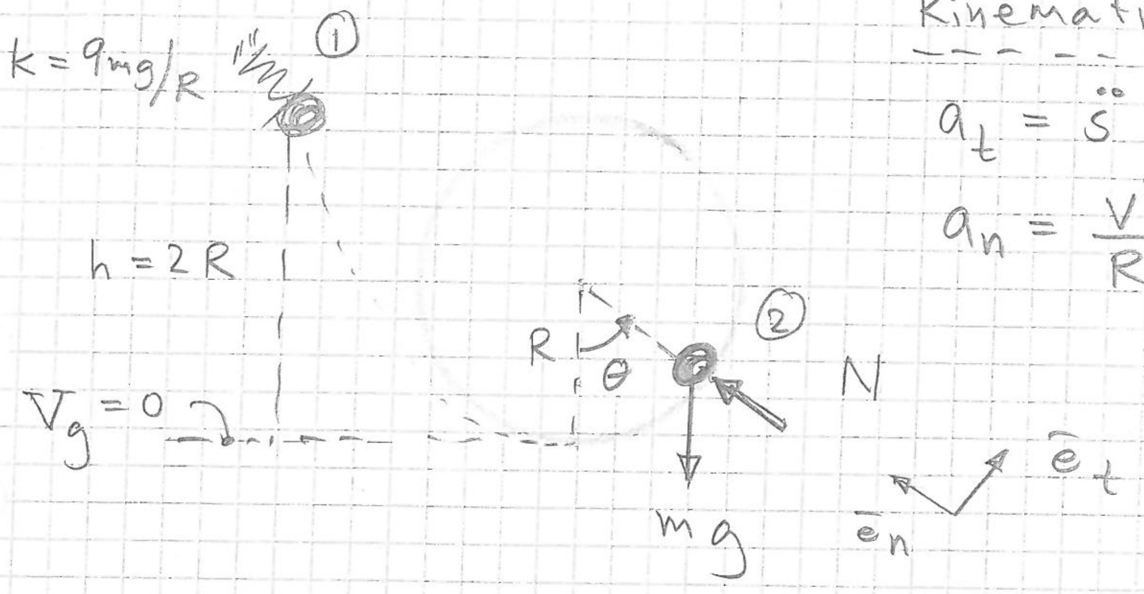
$$+\left(a\frac{T_1}{\sqrt{3}} - a\frac{T_2}{\sqrt{2}}\right)\bar{e}_z = \bar{0}$$

ger $T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ //

$T_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}mg = \frac{1}{\sqrt{2}}mg$ //

$(T_1, T_2 > 0$ ok, dragkraft$)$

4) Frilägg A vid godtyckligt θ i cirkeln.



Kinematik

$$a_t = \ddot{s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_t \nearrow \quad -mg\sin\theta = m\ddot{s} \qquad (1)$

$\bar{e}_n \nwarrow \quad N - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R} \qquad (2)$

(2) ger $\quad N = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2}{R} \qquad (3)$

Bestäm $v(\theta)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R - R\cos\theta) - mg2R - \frac{1}{2}k\delta^2$$

ger $\quad v^2 = 2gR + 2gR\cos\theta + \dfrac{k}{m}\delta^2$

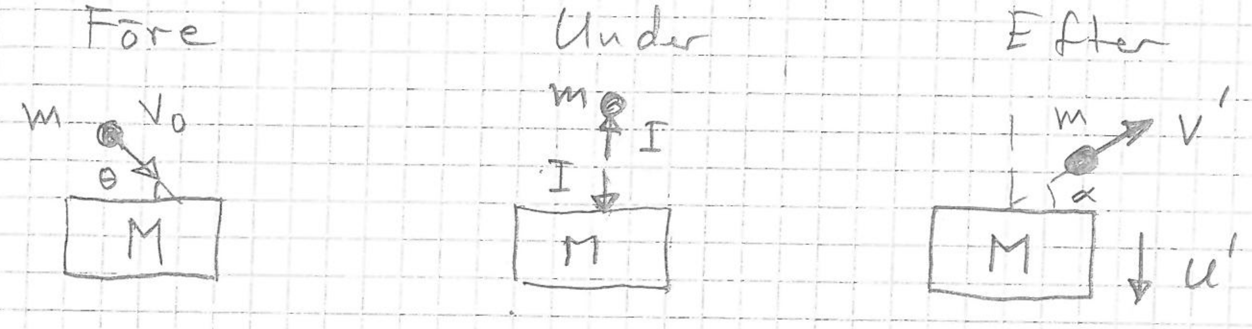
ins. i (3) ger med $k = 9mg/R$

a) $\quad N(\theta) = mg\left(3\cos\theta + 2 + 9\dfrac{\delta^2}{R^2}\right)$ //

$N \geq 0 \ \forall \theta$ ger (mest kritiskt då $\theta = \pi$)

b) $\quad \delta \geq \dfrac{1}{3}R$ //

5) Stöten $(\theta = 45^\circ,\ e = \frac{1}{2})$



För systemet $(m+M)$ $\bar{I}_s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$

$\rightarrow$ $0 = mV'\cos\alpha - mV_0\cos\theta$ (1)

$\downarrow$ $0 = Mu' - mV'\sin\alpha - mV_0\sin\theta$ (2)

Stöttalet $\uparrow n$ $e = \dfrac{V'\sin\alpha - (-u')}{0 - (-V_0\sin\theta)} = \dfrac{1}{2}$ (3)

(2), (3) ger $u' = \dfrac{3}{2}\dfrac{mV_0\sin\theta}{(M+m)} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} mV_0 / (M+m)$

Bestäm δ vid vändläget för fjädrarna //

$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ ger

$$0 = 0 - \frac{1}{2}Mu'^2 - Mg\delta + 2\cdot\frac{1}{2}k(\delta+\delta_0)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}k\delta_0^2 \quad (4)$$

där δ_0 är statiska deformationen vid vila

$\downarrow$ $Mg - 2\cdot k\delta_0 = 0$ ger $\delta_0 = \dfrac{Mg}{2k}$

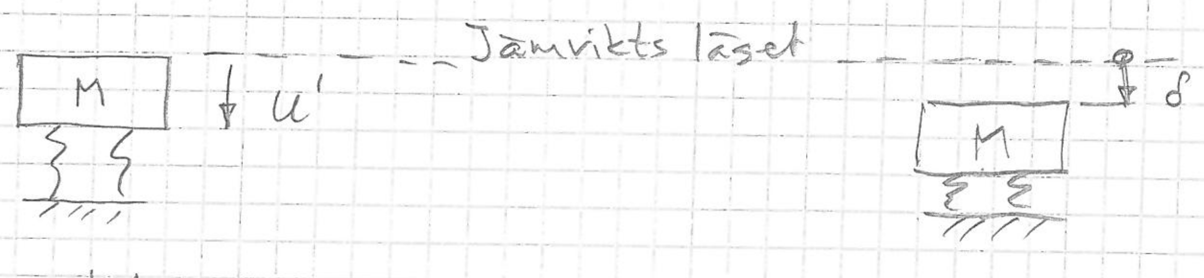
(4) ger $\delta^2 = \dfrac{Mu'^2}{2k}$ dvs $\delta = u'\sqrt{\dfrac{M}{2k}}$

$$\delta = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{mV_0}{(M+m)} \cdot \sqrt{\frac{M}{2k}} = \frac{3}{2} \frac{mV_0}{(M+m)} \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}$$

Totala deformationen vid vändläget

$\Delta = \delta + \delta_0$ dvs

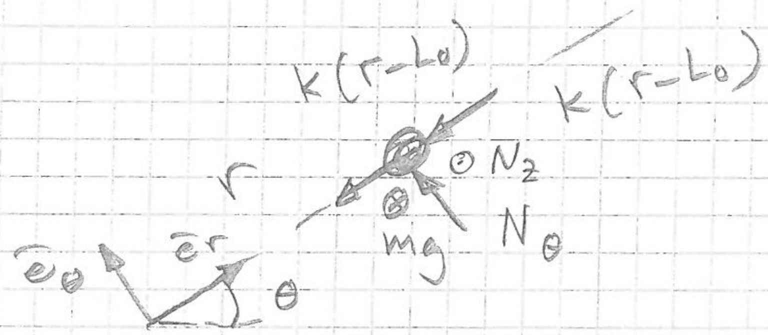
$$\Delta = \frac{3}{2} \frac{mV_0}{(M+m)} \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} + \frac{Mg}{2k}$$ //



Efter stöten

Vändläget

6) Frilägg



<u>Kinematik</u>

$\dot{\theta} = \omega = \text{konst.}$

$\ddot{\theta} = 0$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\omega^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2\dot{r}\omega$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_r$ $\nearrow$ $\quad -2k(r-L_0) = m(\ddot{r} - r\omega^2) \quad (1)$

$\bar{e}_\theta$ $\nwarrow$ $\quad N_\theta = m \cdot 2\dot{r}\omega \quad (2)$

$\bar{e}_z$ $\odot$ $\quad N_z - mg = m \cdot 0 \quad (3)$

(1) ger $\ddot{r} + \left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right) r = \frac{2k}{m} L_0$

Ident. med $\ddot{r} + 2\zeta\omega_n\dot{r} + \omega_n^2 r = \omega_n^2 X_1$

ger $\omega_n^2 = \left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)$, $\zeta = 0$, $X_1 = \frac{2kL_0}{m\omega_n^2}$

dvs $X_1 = \frac{2kL_0}{2k - m\omega^2}$, så

$$r(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{2kL_0}{2k - m\omega^2}$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m} - \omega^2}$

B.V. då $t = 0$

$r(0) = L_0$ ger $A = -\dfrac{mL_0 w^2}{2k - mw^2}$

$\dot{r}(0) = 0$ ger $B = 0$

Således:

$$r(t) = -\frac{mL_0 w^2}{2k - mw^2} \cdot \cos w_n t + \frac{2k}{2k - mw^2} \cdot L_0$$

eller

$$r(t) = -\frac{w^2}{w_n^2} L_0 \cos w_n t + \frac{2k}{m w_n^2} L_0 \quad //$$

$\dot{r}(t) = \dfrac{w^2}{w_n} L_0 \sin w_n t$ och via (2), (3)

$$\begin{cases} N_\theta = 2m\dot{r}\omega = 2m \dfrac{w^3}{w_n} L_0 \sin w_n t \quad // \\ N_z = mg \quad // \end{cases}$$

$N = \sqrt{N_\theta^2 + N_z^2}$ // där $w_n = \sqrt{\dfrac{2k}{m} - w^2}$