Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2015-10-26, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER2, TER3, TERD, TERE

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2015-10-26

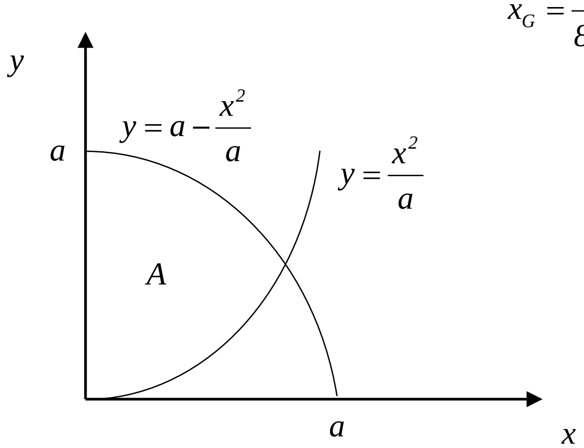
Teoridel:

1)
Masscentrum för en kropp definieras som bekant enligt nedan:

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho \, dV}{\int_V \rho \, dV}$$

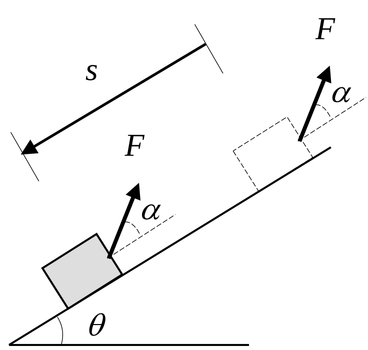
Betrakta en tunn homogen plåt med konstant tjocklek t i z-led och där arean A i xy-planet begränsas av kurvan $y = a - x^2/a$ och $y = x^2/a$ samt av y-axeln enligt figuren nedan. Visa att masscentrums läge i x-led ges av:

$$x_G = \frac{3a}{8\sqrt{2}} \qquad \text{(2p)}$$



2)
En partikel förflyttar sig en sträcka s <u>nedför</u> ett lutande plan med lutningsvinkeln θ enligt figur. Partikeln <u>bromsas in</u> under rörelsen med en konstant kraft F som hela tiden bildar vinkeln α mot planet. Utgå från definitionen av arbete, $U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \circ d\,\boldsymbol{r}$ och visa att arbetet som kraften F uträttar på partikeln under förflyttningen är

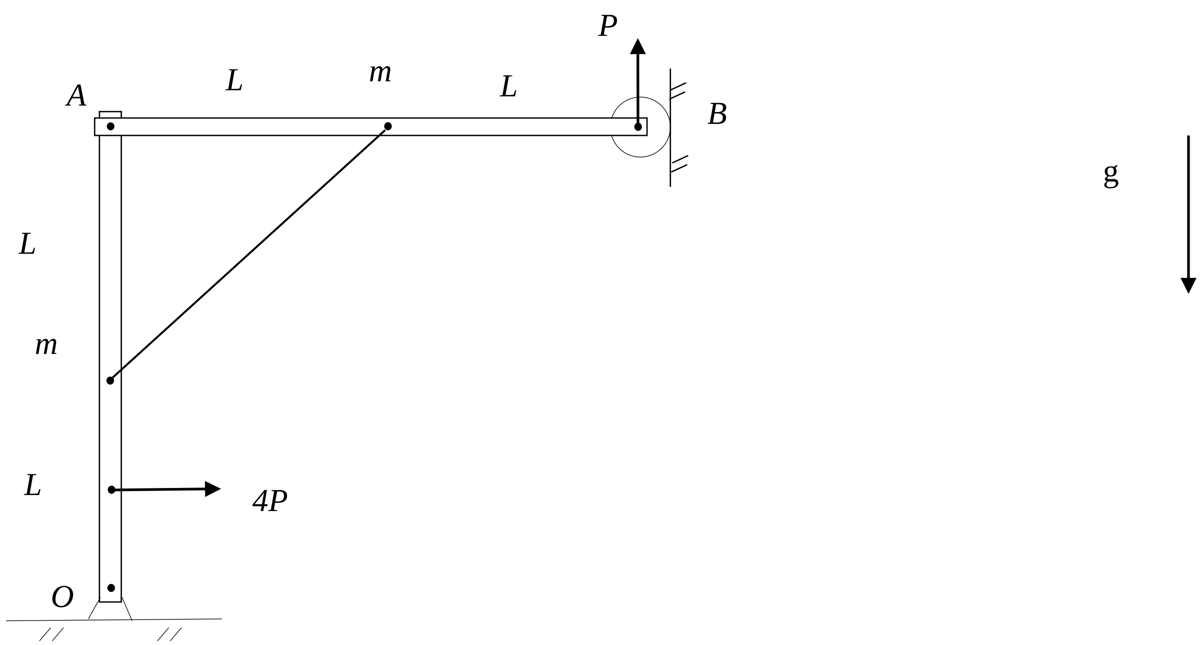
$$U = -F\, s \cos\alpha . \qquad \text{(1p)}$$



Problemdel:

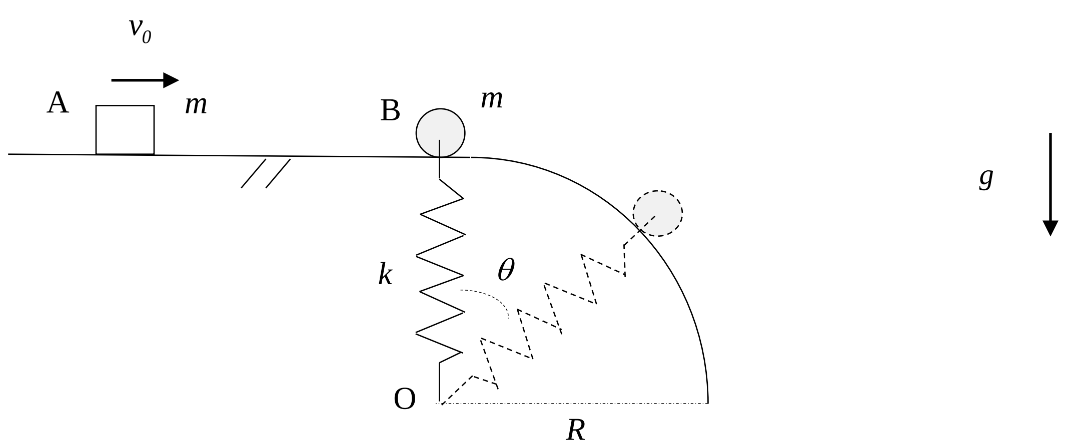
3)
Två stänger OA och AB med massan *m* och längden *2L* vardera är sammankopplade enligt figur. Stången OA är vertikal och AB är horisontell. Mellan mittpunkterna på OA och AB är ett snöre fäst och vid B en rulle med försumbar massa som kan tryckas mot en vertikal vägg. På systemet appliceras dels en vertikal kraft *P* i rullens centrum och en horisontell kraft *4P* på stången OA på höjden *L/2* från O enligt figur. Beräkna kraften i snöret samt reaktionskraften vid O. Låt $P = mg$ vid beräkningen och svara med beloppet. Friktionen vid lederna O och A samt vid rullen kan försummas.

(3p)



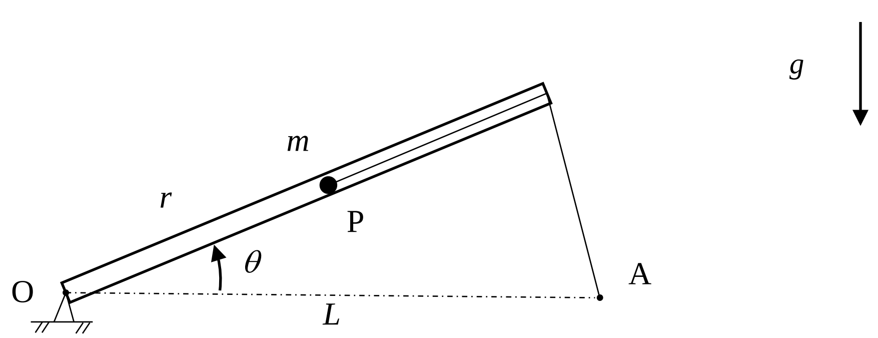
4)
En partikel A med massan m ges en hastighet v_0 längs ett horisontellt underlag enligt figur. Partikeln kolliderar sedan med stillastående partikel B med massan m som är fäst i en fjäder med fjäderkonstanten k, se figur. Stöttalet vid kollisionen är $e = 1$ och efter stöten rör sig partikel B i en cirkelbana med radien R där O är cirkelns mittpunkt. Beräkna normalkraften från banan på partikel B som funktion av vinkeln θ. Studera intervallet $0 \le \theta \le \pi / 2$ och låt $v_0 = \sqrt{gR}$, $k = 12 mg / R$ och fjäderns ospända längd $L_0 = R / 2$. Försumma friktionen.

(3p)



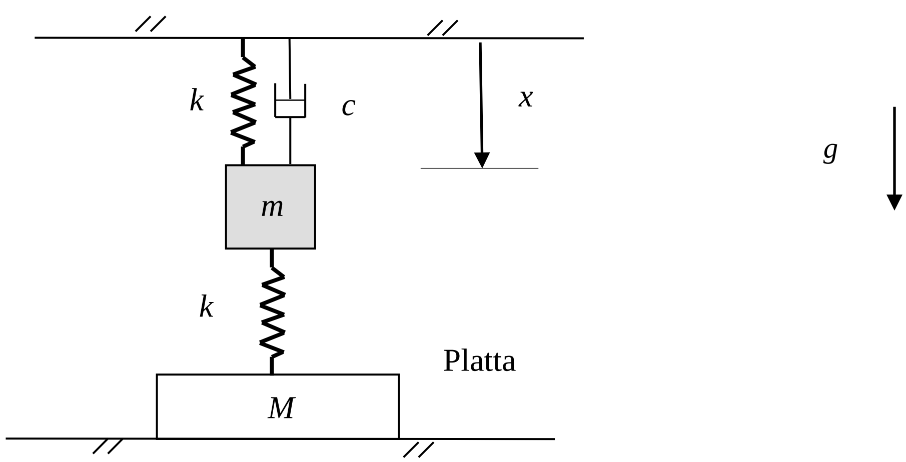
5)
En partikel P med massan m kan röra sig inuti ett friktionsfritt rör med längden L som roterar med den konstanta vinkelhastigheten $\dot{\theta} = \omega$, där θ är rörets rotationsvinkel. Partikelns rörelse i röret styrs av ett snöre AP som är fäst i partikeln och fixerat vid A enligt figur. Detta innebär att avståndet $r = \text{OP}$ ges av uttrycket $r = 2L \sin(\theta/2)$, där L är snörets längd vilket sammanfaller med rörets längd. Beräkna dragkraften i snöret samt normalkraften från röret på partikeln som funktion av vinkeln θ. Rörelsen sker i ett och samma vertikalplan. Studera intervallet $0 \le \theta \le \pi / 3$ då partikeln befinner sig inuti röret och låt $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{5L}}$.

(3p)



6)
En partikel med massan m är kopplad till två fjädrar med fjäderkonstanten k vardera och en dämpare med dämpkonstanten $c = 2\sqrt{2km}$ enligt figur. Den undre fjädern är fäst i en platta med massan M som vilar mot ett horisontellt underlag. Båda fjädrarna är ospända då $x = L_0$ där L_0 är den ospända längden för respektive fjäder. Systemet startas vid tiden $t=0$ genom att massan m släpps utan hastighet från positionen $x = L_0 + mg / k$. Det får antas att plattans massa M är så pass stor så att plattan inte lättar från underlaget för den efterföljande rörelsen utan befinner sig i fortvarig vila.

a) Beräkna läget x för massan m som funktion av tiden. (2p)
b) Beräkna normalkraften mellan plattan och underlaget som funktion av tiden. (1p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

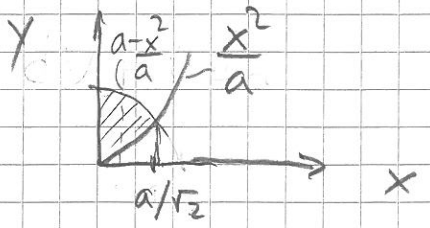
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

$$dV = t\,dA$$



1) $$\bar{r}_G = \frac{\int_V \bar{r}\,\varrho\,dV}{\int_V \varrho\,dV} \quad ;$$

$$\varrho,\ t = \text{konst.}$$

$$x_G = \frac{\int_V x\,\varrho\cdot t\,dA}{\int_V \varrho\cdot t\,dA} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$

$$\int_A x\,dA = \int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left[\int^{a-\frac{x^2}{a}} dy\right] x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \Big[\,Y\,\Big]_{x^2/a}^{a-x^2/a} x\,dx = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(a - 2\frac{x^2}{a}\right) x\,dx =$$

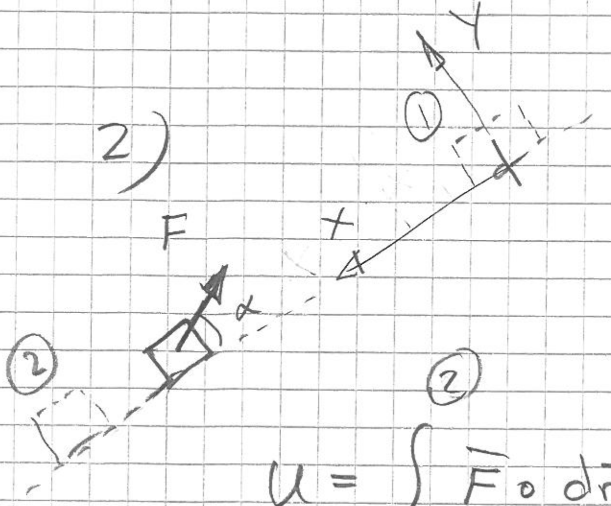
$$= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(ax - \frac{2x^3}{a}\right) dx = \left[a\frac{x^2}{2} - \frac{2}{a}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{a^3}{8} \quad //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left[\int_{\frac{x^2}{a}}^{a-\frac{x^2}{a}} dy\right] dx = \int_0^{a/\sqrt{2}} \Big[\,Y\,\Big]_{x^2/a}^{a-x^2/a} dx$$

$$= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(a - 2\frac{x^2}{a}\right) dx = a^2\frac{\sqrt{2}}{3} \quad //$$

$$x_G = \frac{a^3/8}{a^2\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{3a}{8\sqrt{2}} \quad // \quad \text{V.S.V.}$$

2)



$$\bar{F} = -F\cos\alpha\,\bar{e}_x + F\sin\alpha\,\bar{e}_y$$

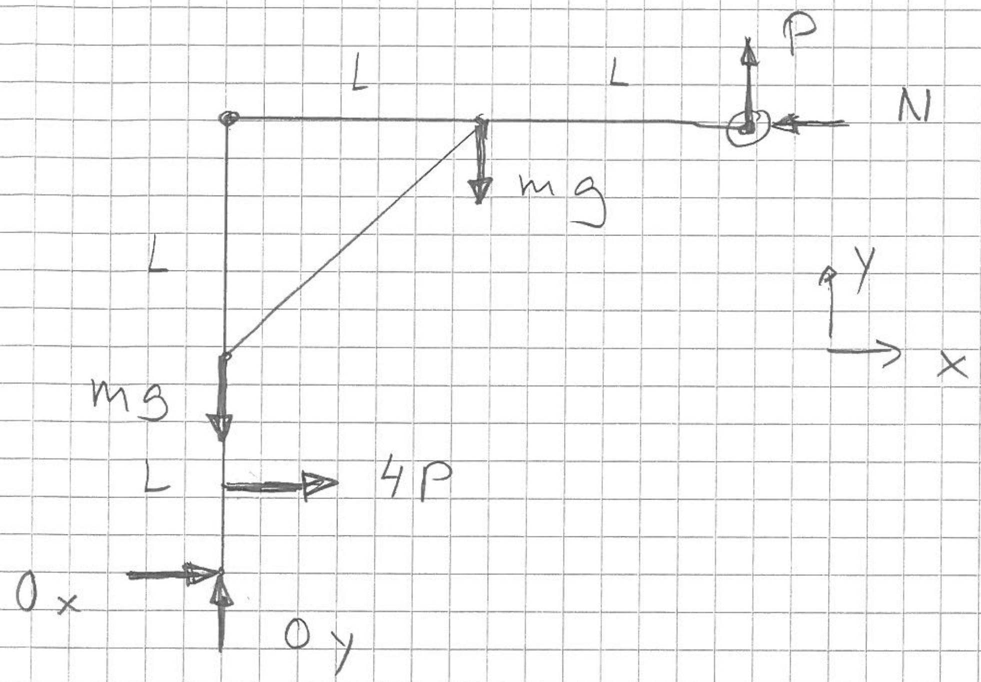
$$\bar{r} = x\,\bar{e}_x\,,\quad d\bar{r} = dx\,\bar{e}_x$$

$$U = \int_{①}^{②} \bar{F} \circ d\bar{r} = \int_0^s -F\cos\alpha\,dx =$$

$$= -F\cos\alpha \int_0^s dx = -F\cos\alpha \cdot s \quad //$$

Således: $U = -F \cdot s \cdot \cos\alpha$ V.S.V.

3) Frilägg systemet



$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0$ ger

$\rightarrow \quad O_x + 4P - N = 0 \qquad (1)$

$\uparrow \quad O_y - mg - mg + P = 0 \qquad (2)$

$\circlearrowleft O) \quad -4P \cdot \frac{L}{2} - mg \cdot L + P \cdot 2L + N \cdot 2L = 0 \qquad (3)$

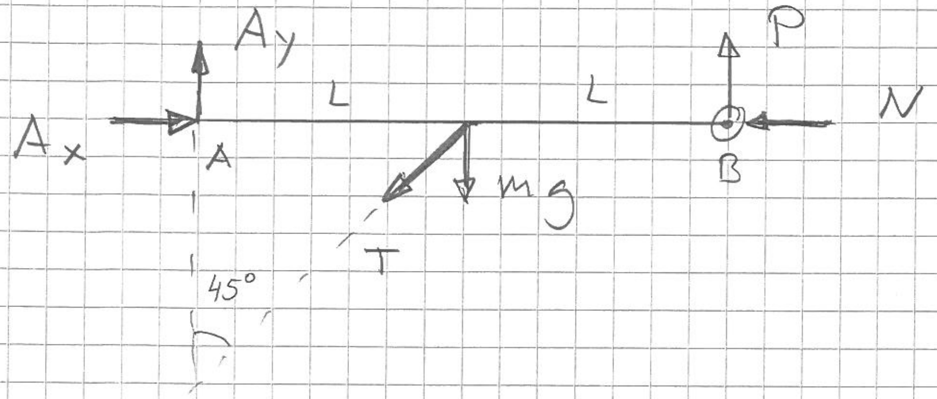
(1), (2), (3) med $P = mg$ ger

$N = \frac{1}{2} mg$

$$\begin{cases} O_x = -\frac{7}{2} mg \\ O_y = mg \end{cases}$$ ger $|F_0| = F_0 = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} =$

$= \frac{\sqrt{53}}{2} mg$ //

Friläss AB



$\rightarrow$ $A_x - T\sin 45^\circ - N = 0$ (4)

$\uparrow$ $A_y - T\cos 45^\circ - mg + P = 0$ (5)

$\curvearrowleft A$ $-mg\cdot L - T\cos 45^\circ \cdot L + P\cdot 2L = 0$ (6)

(6) ger med $P = mg$ och $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

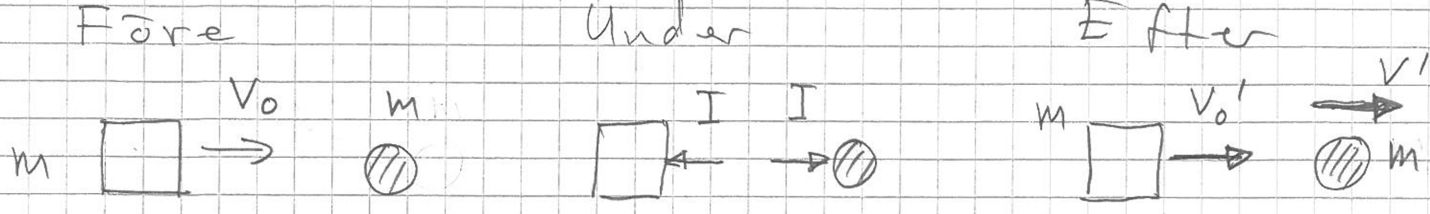
$$-mgL - T\cdot L\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + mg\cdot 2L = 0$$

$$T = \sqrt{2}\,mg \quad //$$

Således: $F_0 = \frac{\sqrt{53}}{2}\,mg$

$$T = \sqrt{2}\,mg$$

4) Stöten



$\bar{I}_S = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ för systemet A+B ger

$$\longrightarrow \quad 0 = mV_0' + mV' - (mV_0 + m\cdot 0) \qquad (1)$$

Stöttalet $e = \dfrac{V' - V_0'}{V_0 - 0} = 1 \quad (2)$

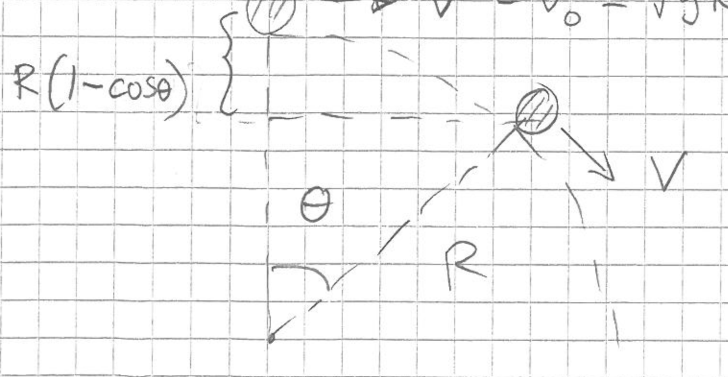
(1), (2) ger $\begin{cases} V' + V_0' = V_0 \\ V' - V_0' = V_0 \end{cases}$

dvs $V' = V_0$ //

$V_0' = 0$ //

Bestäm $V(\theta)$ efter stöten

$V' = V_0 = \sqrt{gR}$ ---- $V_g = 0$



$L - L_0 = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$

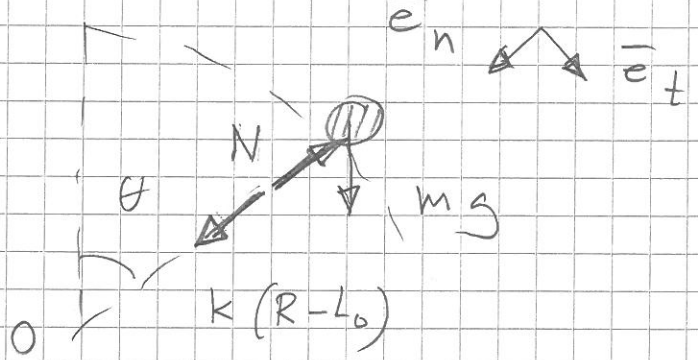
$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ ger

$$0 = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 + - mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

ger $v^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\theta)$; $v_0 = \sqrt{gR}$

dvs $v^2(\theta) = 3gR - 2gR\cos\theta$ //

Bestäm $N(\theta)$, Frilägg partikel B



$L_0 = \frac{R}{2}$

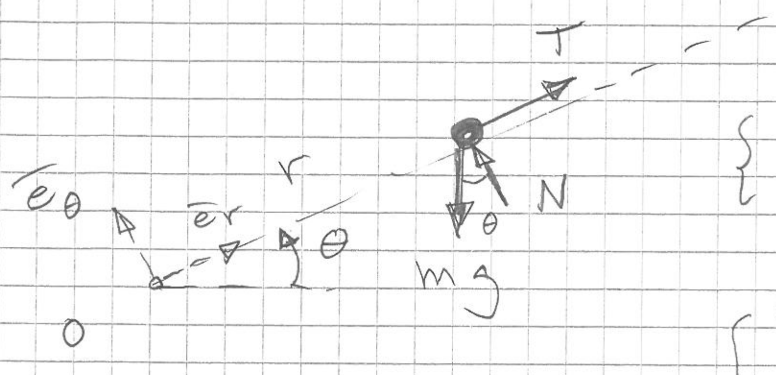
$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\swarrow \bar{e}_n$ $k(R-L_0) - N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$

dvs $k\left(R-\frac{R}{2}\right) - N + mg\cos\theta = \frac{m}{R}(3gR - 2gR\cos\theta)$

med $k = 12mg/R$ fås

$$N(\theta) = 3mg(\cos\theta + 1) \quad //$$

5) Frilägg partikeln P



$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2L\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), & \dot{\theta} = \omega = \\ & = \text{konst.} \\ \dot{r} = L\omega\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \ddot{r} = -L\omega^2 \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Dvs $a_r = -\frac{5}{2}L\omega^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$a_\theta = 2L\omega^2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_r \nearrow$ $\quad T - mg\sin\theta = m\left(-\frac{5}{2}L\omega^2\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

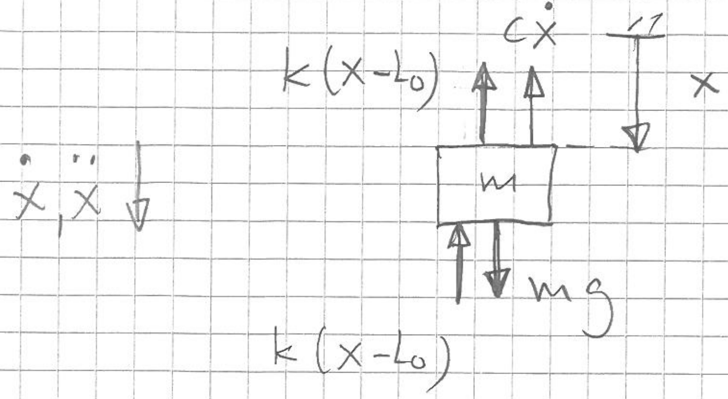
$\bar{e}_\theta \nwarrow$ $\quad N - mg\cos\theta = m\cdot 2L\omega^2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

med $\omega = \sqrt{\frac{2g}{5L}}$ fås

$$T(\theta) = mg\left(\sin\theta - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad //$$

$$N(\theta) = mg\left(\cos\theta + \frac{4}{5}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad //$$

6) Frilägg m



$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$$

$$\downarrow \quad mg - 2k(x-L_0) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = g + \frac{2k}{m}L_0$$

Ident. med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

$$2\zeta\omega_n = \frac{c}{m} \quad ; \quad \omega_n^2 = \frac{2k}{m} \quad ; \quad \omega_n^2 x_1 = g + \frac{2k}{m}L_0$$

ger med $c = 2\sqrt{2km}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad ; \quad \zeta = 1 \quad , \quad x_1 = \frac{mg}{2k} + L_0$$

dvs $x(t) = (A + B\cdot t)e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{2k} + L_0$

B.V. då $t = 0$ $\quad x(0) = L_0 + \frac{mg}{k}$

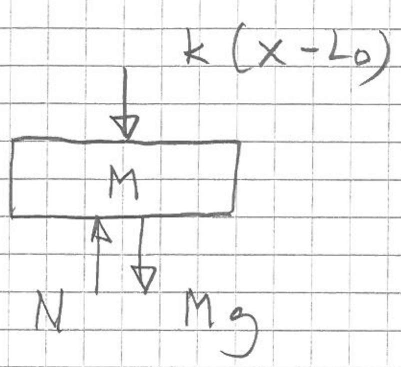
$$\dot{x}(0) = 0$$

ger $A = \frac{mg}{2k}$; $B = \frac{mg}{2k}\omega_n$ och

$$x(t) = \frac{mg}{2k}(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{2k} + L_0$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ //

Frilägg M (som är i vila $\forall t$)



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\downarrow \quad Mg + k(x - L_0) - N = M \cdot 0$ ger

$$N(t) = Mg + \frac{mg}{2} + \frac{mg}{2}\left(1 + w_n t\right) e^{-w_n t}$$ //

där $w_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$\left(N(t) > 0 \ \forall t \text{, dvs kontakt} \right)$