Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2015-08-24, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER1

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2015-08-24

Teoridel:

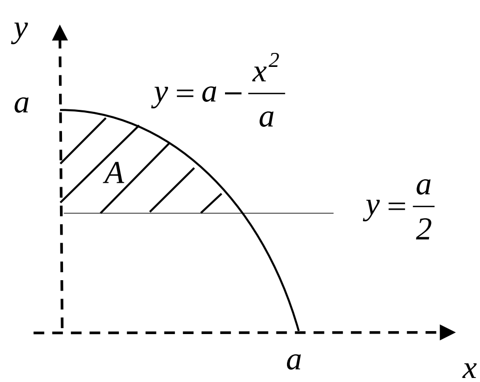
1)

Centroiden för en yta definieras som bekant som $\boldsymbol{r}_C = \dfrac{\int_A \boldsymbol{r}\, dA}{\int_A dA}$.

Visa att centroidens läge i x-led för arean A nedan som begränsas av kurvan $y = a - x^2/a$ samt linjen $y = a/2$ och y-axeln ges av:

$$x_C = \frac{3a}{8\sqrt{2}}$$

(2p)



2)

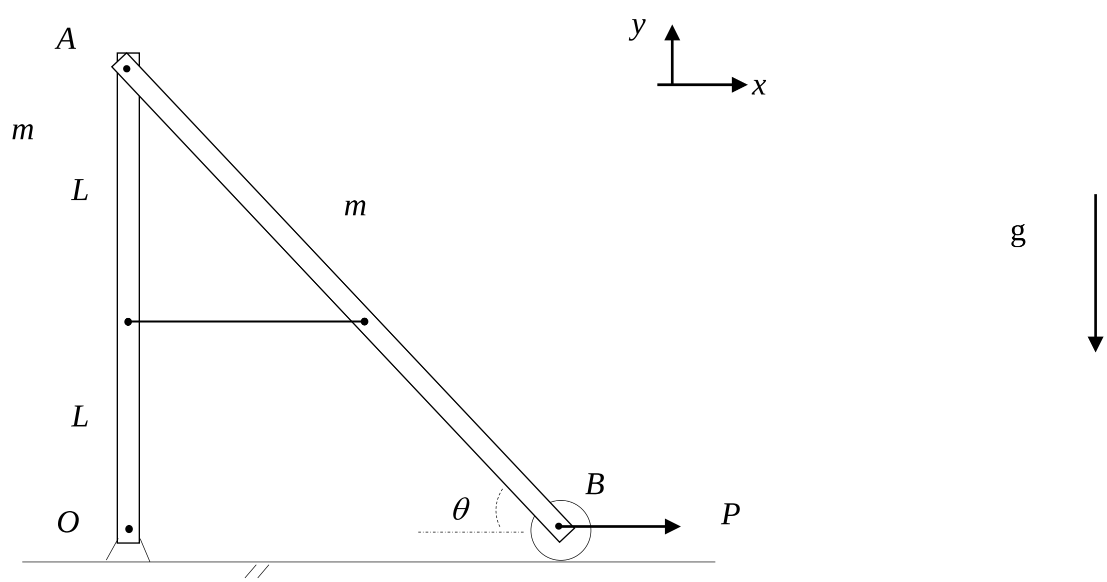
Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ och definitionen av rörelsemängd $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$ och härled impulslagen för en partikel, dvs

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F}\, dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1 \qquad \text{(1p)}$$

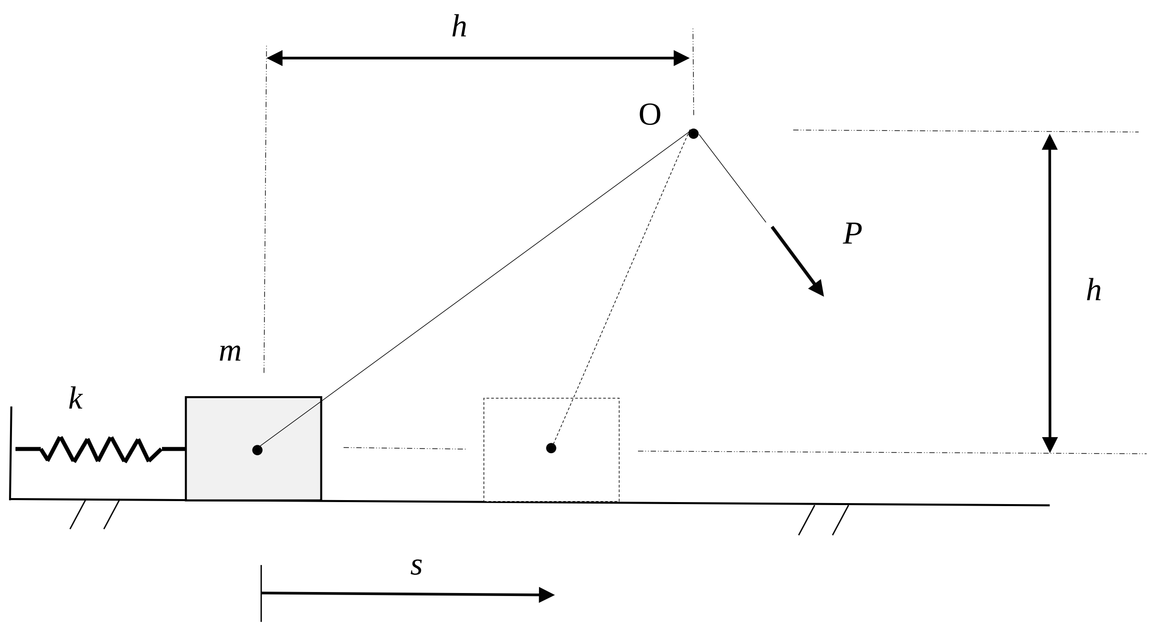
Problemdel:

3)
Två stänger OA och AB med massan *m* vardera är sammankopplade enligt figur. Stången OA har längden *2L* och mellan mittpunkterna på OA och AB är ett horisontellt snöre fäst. På systemet appliceras sedan en kraft *P* i rullens centrum vid B. Speciellt gäller att $P=mg$ och vinkeln $\theta=45$ grader. Beräkna kraften i snöret och kraften från stången OA på AB vid A. Svara med beloppet. Friktionen vid lederna O och A samt vid rullen kan försummas och systemet står på ett horisontellt underlag.

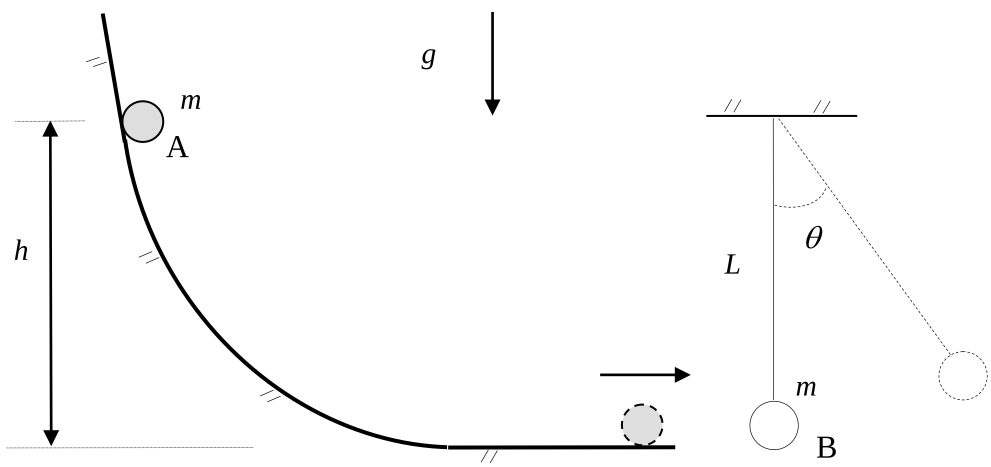
(3p)



4)
En kloss med massan *m* kan förflyttas längs ett horisontellt underlag genom att man drar med en konstant kraft *P* i ett snöre som löper över en fix spik vid O enligt figur. Systemet startar från vila då fjädern med fjäderkonstanten *k* är ospänd. Beräkna klossens hastighet då den har förflyttat sig sträckan $s = h$ längs underlaget och precis befinner sig rakt under O, där *h* är given enligt figuren. Försumma friktionen och speciellt gäller att $k = P/2h$.

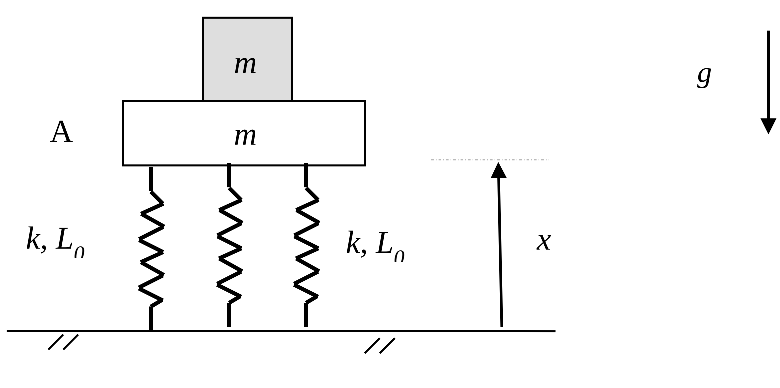


5)
En partikel A med massan *m* släpps från vila då den befinner sig på höjden *h* ovanför horisontalen enligt figur. Partikel A följer sedan en krökt bana som övergår till en horisontell del där den lämnar banan och kolliderar med en stillastående partikel B med massan *m* som är fäst i ett snöre med längden *L*. Efter stöten utför partikel B en pendelrörelse och stöttalet mellan partiklarna är $e = 1$. Beräkna dragkraften i snöret som funktion av utslagsvinkeln θ. Låt $L = h$. Partiklarnas dimensioner och friktionen kan försummas. Det får antas att partiklarnas mittpunkter är på samma höjd vid stöten.   (3p)



6)
En partikel A med massan *m* är kopplad till tre fjädrar med fjäderkonstanten *k* vardera enligt figur. Man placerar sedan en låda med massan *m* ovanpå A. Systemet startas vid tiden $t=0$ genom att båda massorna släpps från vila från den position då fjädrarna har ospända längden L_0, dvs då $x=L_0$. Beräkna normalkraften mellan lådan och partikel A som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen. Ledning: Bestäm responsen $x(t)$ för systemet $2m$ först.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

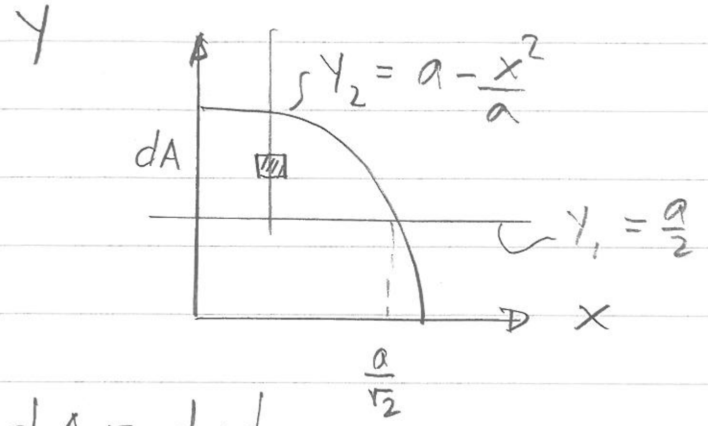
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1) dx dy - element



$$X_c = \frac{\int_A x \, dA}{\int_A dA}$$

$$dA = dx\,dy$$

$$\int_A x \, dA = \int_A x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left[\int_{\frac{a}{2}}^{a-\frac{x^2}{a}} dy \right] x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} x \left(a - \frac{x^2}{a} - \frac{a}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(\frac{a}{2} x - \frac{x^3}{a} \right) dx =$$

$$= \frac{a^3}{16} \quad //$$

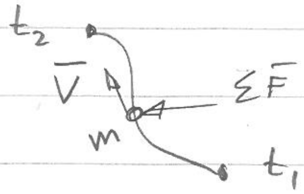
$$\int_A dA = \int_A dx \, dy = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left[\int_{\frac{a}{2}}^{a-\frac{x^2}{a}} dy \right] dx =$$

$$= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(a - \frac{x^2}{a} - \frac{a}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(\frac{a}{2} - \frac{x^2}{a} \right) dx =$$

$$= \frac{a^2}{3\sqrt{2}} \quad // \qquad X_c = \frac{\frac{a^3}{16}}{\frac{a^2}{3\sqrt{2}}} = \underline{\underline{\frac{3a}{8\sqrt{2}}}} \quad \text{v.s.v.}$$

2)

$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$



mult. med dt och integrera

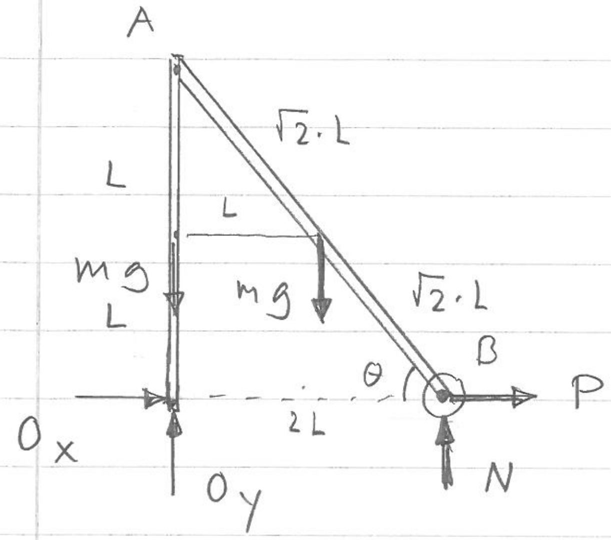
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\bar{v})\,dt$$

$\bar{G} = m\bar{v}$

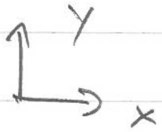
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\,dt = \Big[m\bar{v}\Big]_{t_1}^{t_2} = \underbrace{m\bar{v}(t_2)}_{\bar{G}_2} - \underbrace{m\bar{v}(t_1)}_{\bar{G}_1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\,dt = \bar{G}_2 - \bar{G}_1 \qquad \text{V.S.V.}$$

3) Frilägg hela systemet



$\theta = 45°$, $P = mg$



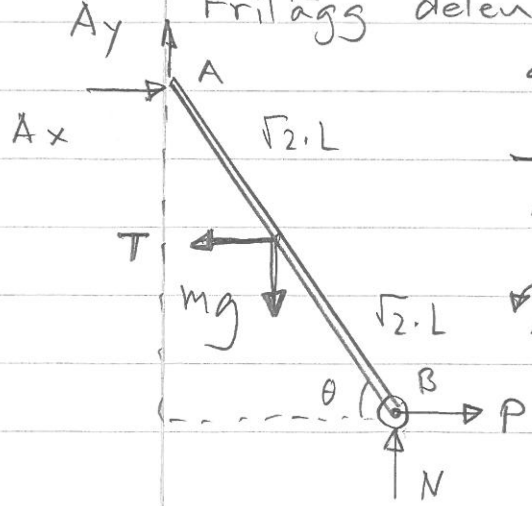
$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ ger

$\rightarrow \quad O_x + P = 0 \qquad (1)$

$\uparrow \quad O_y - mg - mg + N = 0 \qquad (2)$

$\circlearrowleft O) \quad -mg\cdot L + N\cdot 2L = 0 \qquad (3)$

Frilägg delen AB



$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ ger

$\rightarrow \quad A_x - T + P = 0 \qquad (4)$

$\uparrow \quad N - mg + A_y = 0 \qquad (5)$

$\circlearrowleft A) \quad N\cdot 2L + P\cdot 2L - T\cdot L - mg\cdot L = 0 \qquad (6)$

(3) ger $N = \frac{1}{2} mg$

(6) ger med $P = mg$ att

$T = 2mg$ //

(4), (5) ger

$$\begin{cases} A_x = mg \\ A_y = \frac{1}{2} mg \end{cases}$$

Dvs. $F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} mg$ (beloppet)

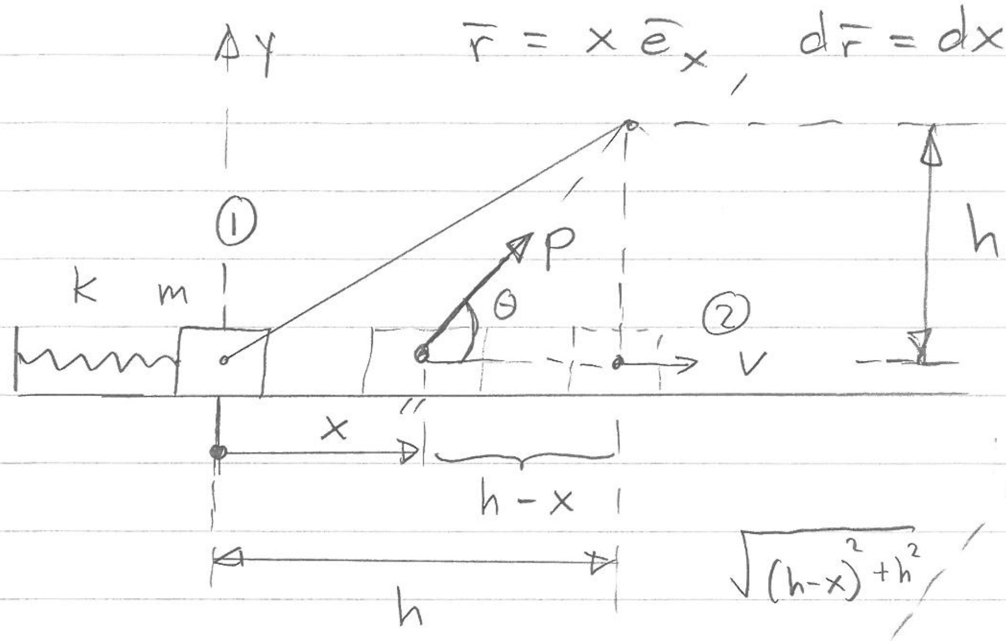
Således: $T = 2mg$

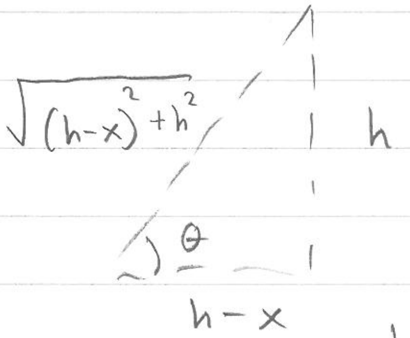
$F_A = \frac{\sqrt{5}}{2} mg$ //

4)

$\bar{P} = P\cos\theta\,\bar{e}_x + P\sin\theta\,\bar{e}_y$

$\bar{r} = x\,\bar{e}_x\,, \quad d\bar{r} = dx\,\bar{e}_x$





$$u = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad (1)$$

$$u = \int_{1}^{2} \bar{P} \circ d\bar{r} = \int_0^h P\cos\theta\, dx \,, \quad \cos\theta = \frac{h-x}{\sqrt{(h-x)^2+h^2}}$$

$$u = \int_0^h P \frac{(h-x)\,dx}{\sqrt{(h-x)^2+h^2}} \quad \Big/ \quad (h-x)^2 = t \,, \quad -2(h-x)\,dx = dt \quad \Big/$$

$$u = -\frac{1}{2}\int_{h^2}^{0} P\frac{dt}{\sqrt{t+h^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{h^2} P\frac{dt}{\sqrt{t+h^2}} =$$

$$= P\left[\sqrt{t+h^2}\right]_0^{h^2} = P\left(\sqrt{2}\cdot h - h\right) = Ph\left(\sqrt{2}-1\right) \quad //$$

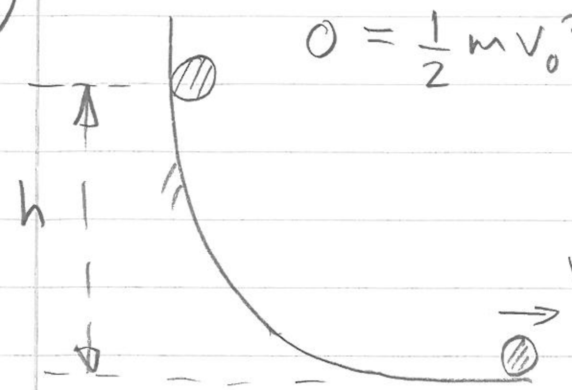
(1) ger $Ph\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{1}{2}mv^2 + 0 + \frac{1}{2}kh^2$

med $k = P/2h$ fås $v^2 = \frac{Ph}{m}\left(2\sqrt{2} - \frac{5}{2}\right)$

dvs $v = \sqrt{\frac{Ph}{m}\left(2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)} \quad //$

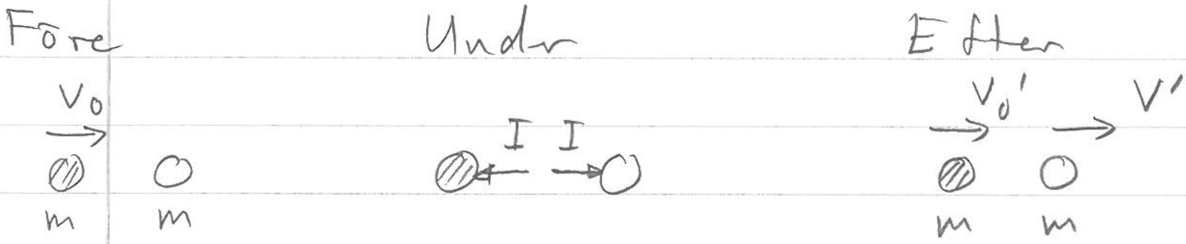
$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ ger

5)



$$0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - mgh \quad , \quad V_0 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Stöten (Räkna på systemet)



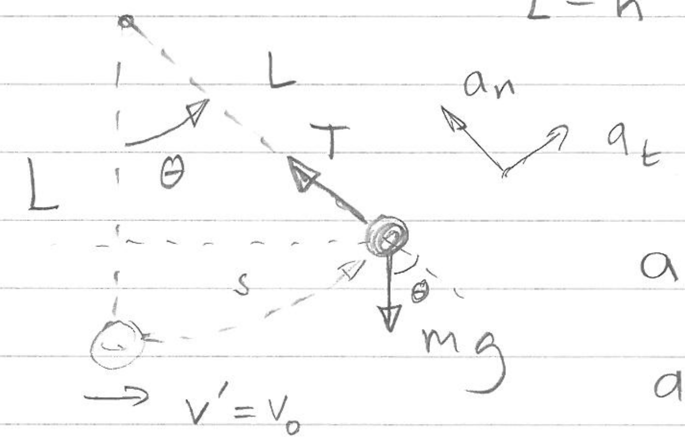
$$\bar{I}_s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1 \quad \text{ger} \longrightarrow 0 = mV_0' + mv' - mV_0 \quad (2)$$

$$e = \frac{V' - V_0'}{V_0 - 0} = 1 \quad (3)$$

(2), (3) ger $\begin{cases} V_0' + v' = V_0 \\ V' - V_0' = V_0 \end{cases}$ dvs $\begin{cases} V' = V_0 \\ V_0' = 0 \end{cases}$

Efter stöten (pendelrörelse)

Frilägg $\qquad L = h$



$$a_n = \frac{v^2}{L}$$

$$a_t = \ddot{s}$$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_n$ ↖ $\qquad -mg\cos\theta + T = m\dfrac{v^2}{L} \qquad (4)$

$\bar{e}_t$ ↗ $\qquad -mg\sin\theta = m\ddot{s} \qquad (5)$

Bestäm $v(\theta)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

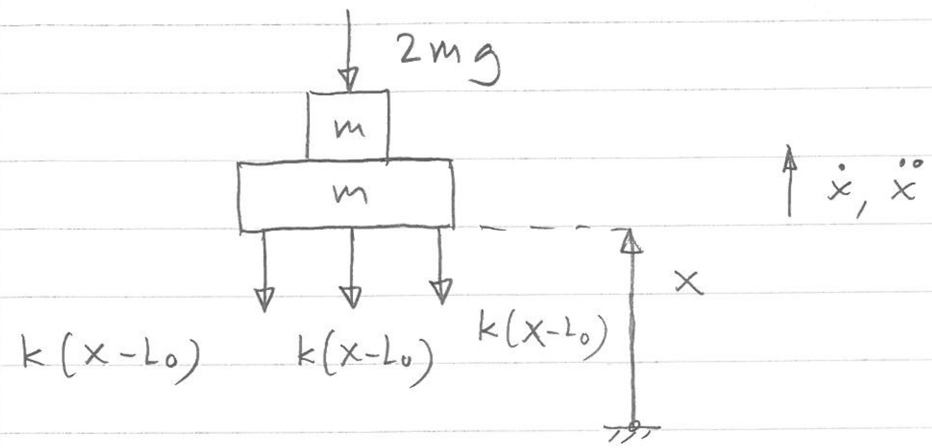
$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + mg(L - L\cos\theta)$$

ger $v^2 = v_0^2 - 2gL(1-\cos\theta)$ där $v_0 = \sqrt{2gh}$ och $L = h$.

dvs $v^2 = 2gh\cos\theta$ ins. i (4) ger

$$T(\theta) = 3mg\cos\theta \quad //$$

6) Frilägg systemet 2m



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$

$\uparrow \quad -3k(x-L_0) - 2mg = 2m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{3k}{2m}x = \frac{3k}{2m}L_0 - g$$

Ident. med

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 \qquad (1)$$

$$0 = 2\zeta\omega_n, \quad \frac{3k}{2m} = \omega_n^2, \quad \frac{3k}{2m}L_0 - g = \omega_n^2 x_1$$

dvs $\zeta = 0$, $\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$, $x_1 = L_0 - \frac{2mg}{3k}$

således (1) har lösn.

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + L_0 - \frac{2mg}{3k}$$

B.V. då $t = 0$

$x(0) = L_0$ ger $A + L_0 - \frac{2mg}{3k} = L_0$

$\dot{x}(0) = 0$ ger $B\omega_n = 0$

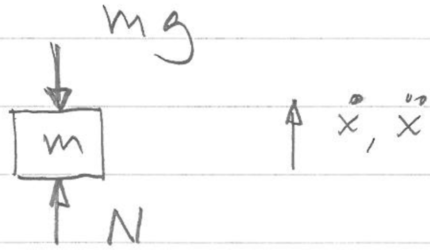
dvs. $A = \frac{2mg}{3k}$, $B = 0$

$$x(t) = \frac{2mg}{3k}\cos\omega_n t + L_0 - \frac{2mg}{3k} \quad //$$

Bestäm $N(t)$

Frilägg m

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$



$$\uparrow \quad N - mg = m\ddot{x}$$

$$N = mg + m\ddot{x}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

$$\downarrow$$

där $\ddot{x} = -\frac{2mg}{3k}\omega_n^2\cos\omega_n t = -g\cos\omega_n t$

ger $N(t) = mg(1 - \cos\omega_n t)$ //

där $\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$