Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2015-01-08, kl 8.00-13.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER3

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 9.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivningstillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2015-01-08

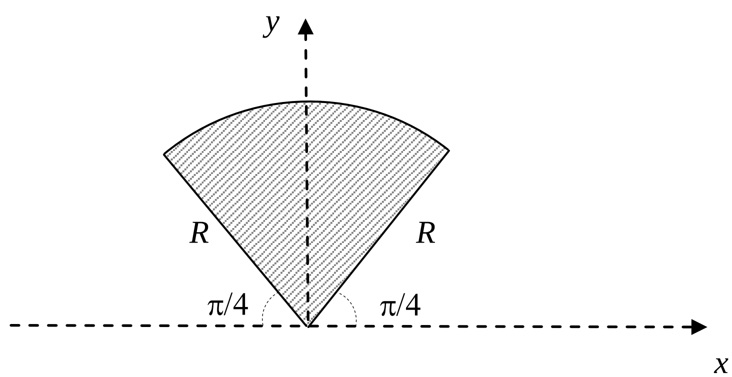
Teoridel:

1)

Centroiden för en yta definieras som bekant som punkten $\boldsymbol{r}_C = \dfrac{\int_A \boldsymbol{r}\, dA}{\int_A dA}$.

Utgå från definitionen ovan och visa att centroidens läge i *y*-led för cirkelsektorn nedan ges av:

$$y_C = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R \qquad \text{(1p)}$$



2)

Den kinetiska energin som en partikel har ges som bekant av $T = \frac{1}{2} m v^2$.

Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, och visa att

$$U = T_2 - T_1$$

där U är uträttat arbete längs en bankurva från läge $\boldsymbol{r}_1$ till $\boldsymbol{r}_2$, dvs

$$U = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \sum \boldsymbol{F} \circ d\boldsymbol{r}$$

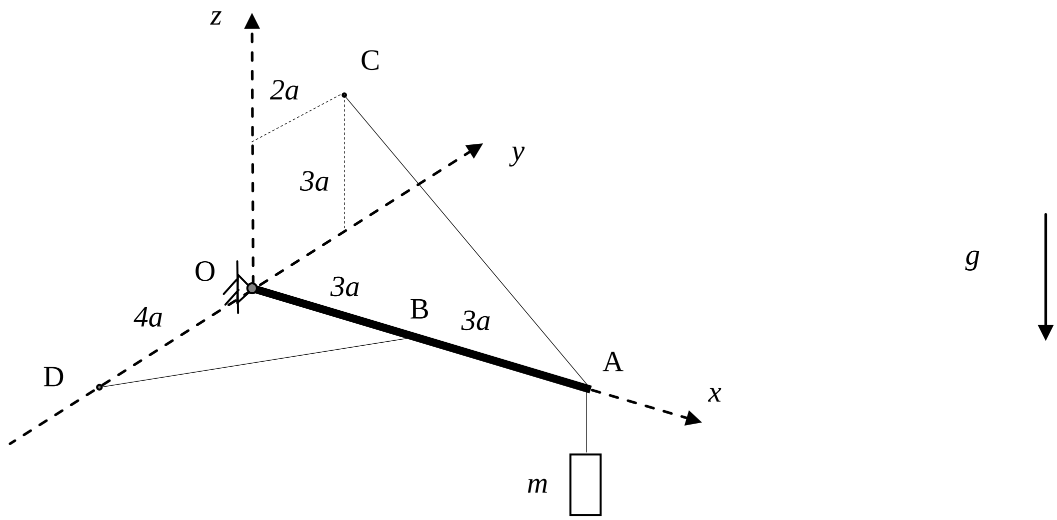
(2p)

Ledning: $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} \circ \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{v})$ där $\boldsymbol{v}$ är partikelns hastighetsvektor.

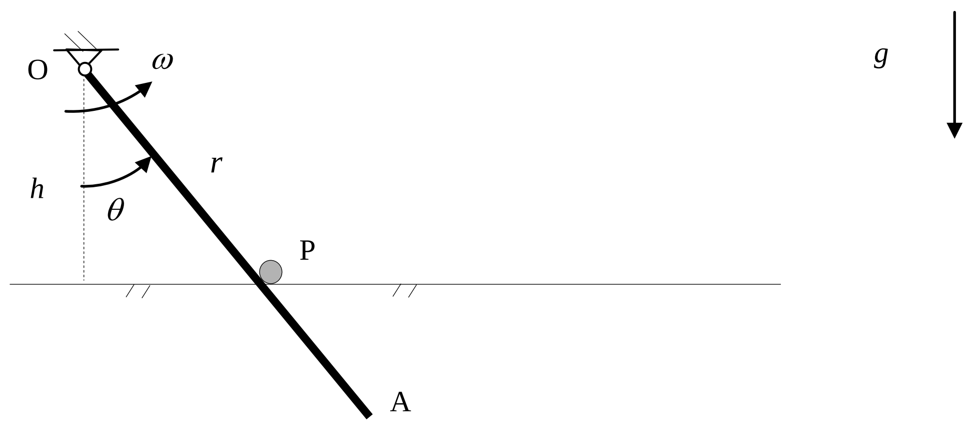
Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2015-01-08

Problemdel:

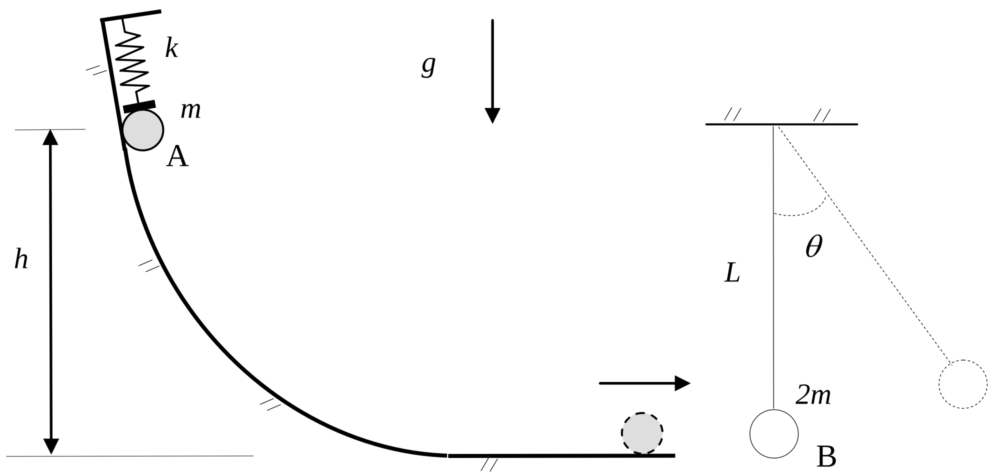
3)
En stång OA med längden 6a är via en kulled fixerad vid O. Vid änden A och i mittpunkten B är två snören AC och BD fästa och fixerade vid C respektive D enligt figur, där C är en punkt i *yz*-planet och D en punkt på *y*-axeln. Stången belastas genom att en vikt med massan *m* är fäst i ett snöre vid A. Beräkna dragkraften i snöret AC och BD samt reaktionskraften vid O. Mått enligt figur och stångens massa kan försummas. (3p)



4)
En arm OA roterar med den konstanta vinkelhastigheten $\dot{\theta} = \omega$ moturs kring en horisontell axel genom den fixa punkten O enligt figur. Armen skjuter på en partikel P med massan *m* som är i kontakt både med armen och det fixa horisontella underlaget. Punkten O befinner sig på höjden *h* ovanför underlaget och avståndet från O till partikeln P ges av uttrycket $r = h / cos\theta$ där $\theta = \omega t$. Ställ upp kraftlagen i polära koordinater och beräkna normalkraften från det horisontella underlaget på partikeln P som funktion av vinkeln θ. Bortse från friktionen vid alla kontaktytor. (3p)

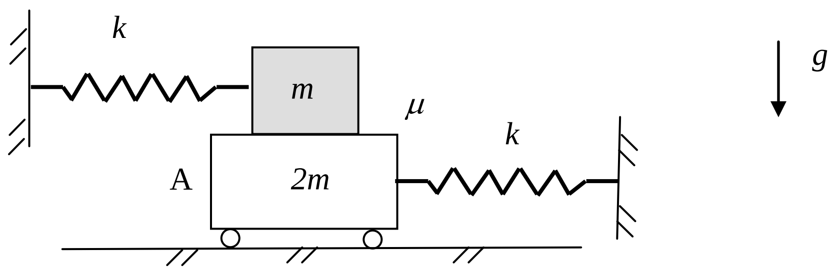


5)
En partikel A med massan m skjuts iväg från vila med hjälp av en fjäder med fjäderkonstanten k och ihoptryckningen (deformationen) δ då den befinner sig på höjden h ovanför horisontalen enligt figur. Partikel A följer sedan en krökt bana som övergår till en horisontell del där den lämnar banan och kolliderar med en stillastående partikel B med massan $2m$ som är fäst i ett snöre med längden L. Efter stöten utför partikel B en pendelrörelse och stöttalet mellan partiklarna är $e = 1$. Beräkna dragkraften i snöret i det läge då utslagsvinkeln θ är maximal (vändläget). Låt $k = mg / h$, $\delta = h / 4$ och $L = h$. Partiklarnas dimensioner och friktionen kan försummas. Det får antas att partiklarnas mittpunkter är på samma höjd vid stöten.   (3p)



6)
En vagn A med massan 2*m* är fäst i en fjäder med fjäderkonstanten *k* och kan röra sig horisontellt enligt figur. På vagnen placeras sedan en låda med massan *m* och i lådan fäster man ytterligare en fjäder med fjäderkonstanten *k*. Den statiska friktionskoefficienten mellan lådan och vagnen är given som μ. Systemet startas vid tiden $t=0$ genom att vagnen ges en hastighet v_0 åt höger då båda fjädrarna är ospända. Beräkna hur stort v_0 maximalt får vara om lådan inte får glida på vagnen under den efterföljande rörelsen. Det får antas att fjädrarna inte bottnar under rörelsen och att friktionen i hjulen kan försummas.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$. Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t}sin(\omega_d t + \Psi)$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

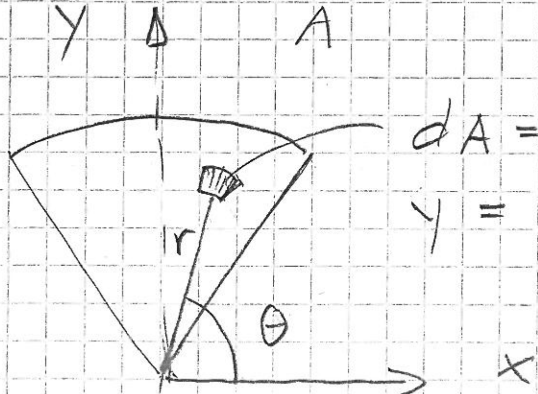
Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)

$$Y_c = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA}$$



$dA = r \, d\theta \, dr$

$y = r \sin\theta$

$$\int_A y \, dA = \int_A r \sin\theta \, r \, d\theta \, dr = \int_A r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[\int_0^R r^2 dr \right] \sin\theta \, d\theta = \frac{R^3}{3} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{R^3}{3} \Big[-\cos\theta \Big]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{R^3}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \quad //$$

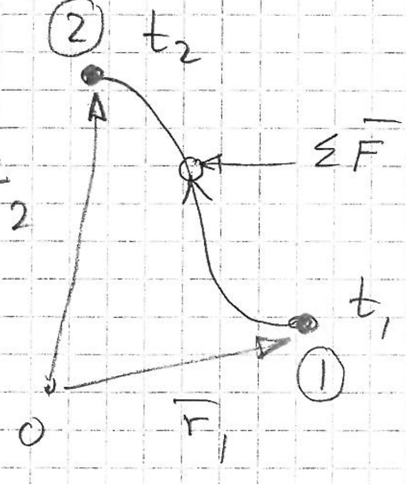
$$\int_A dA = \int_A r \, d\theta \, dr = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[\int_0^R r \, dr \right] d\theta =$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi R^2}{4} \quad //$$

$$Y_c = \frac{R^3}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \Big/ \frac{\pi R^2}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R \qquad \text{V.S.V.}$$

2) $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ mult. med $d\bar{r}$ skalärt och integrera

$$\underbrace{\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \sum \bar{F} \circ d\bar{r}}_{U} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} m\bar{a} \circ d\bar{r}$$



d.v.s

$$U = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} m\bar{a} \circ d\bar{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \underbrace{\frac{d\bar{v}}{dt}}_{\bar{a}} \circ \underbrace{\frac{d\bar{r}}{dt} dt}_{d\bar{r}} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\bar{v}}{dt} \circ \bar{v}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\bar{v} \circ \bar{v})\, dt$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\bar{v} \circ \bar{v} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} m \left[|\bar{v}|^2 \right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{1}{2} m \left[v^2 \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} m v^2(t_2) - \frac{1}{2} m v^2(t_1)$$

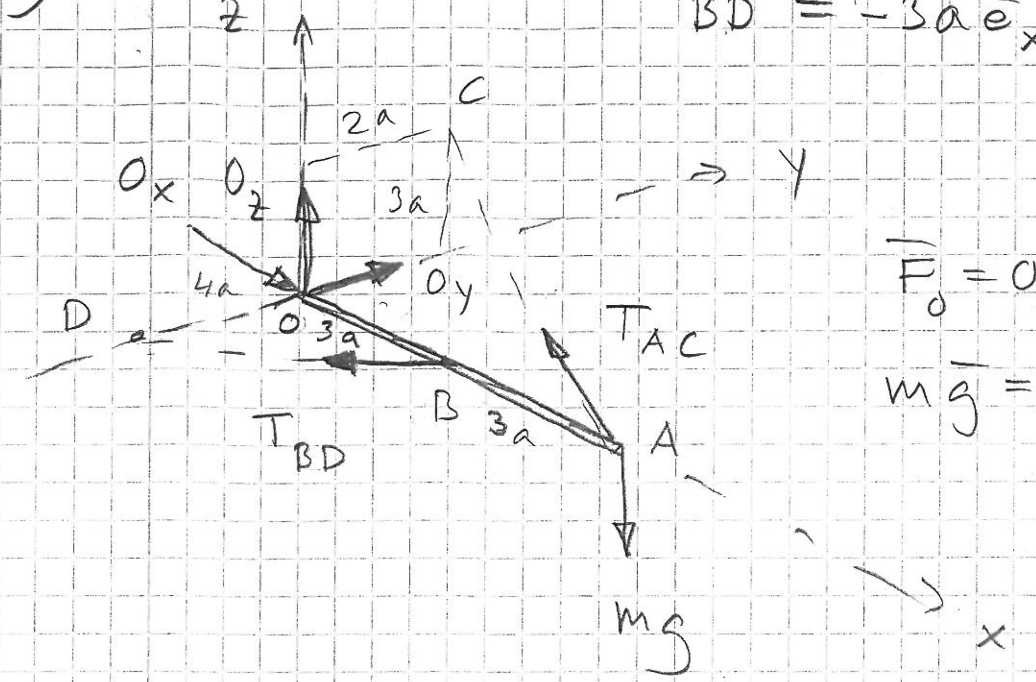
$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1 \text{, d.v.s}$$

$U = T_2 - T_1$ v.s.v.

3) Frilägg,

$\overline{AC} = -6a\bar{e}_x + 2a\bar{e}_y + 3a\bar{e}_z$

$\overline{BD} = -3a\bar{e}_x - 4a\bar{e}_y$



$\bar{F}_0 = O_x\bar{e}_x + O_y\bar{e}_y + O_z\bar{e}_z$

$m\bar{g} = -mg\bar{e}_z$

$$\bar{T}_{AC} = T_{AC}\,\bar{e}_{AC} = T_{AC}\frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = \frac{T_{AC}}{7}\left(-6\bar{e}_x + 2\bar{e}_y + 3\bar{e}_z\right)$$

$$\bar{T}_{BD} = T_{BD}\,\bar{e}_{BD} = T_{BD}\frac{\overline{BD}}{|\overline{BD}|} = \frac{T_{BD}}{5}\left(-3\bar{e}_x - 4\bar{e}_y\right)$$

Jämvikt ($\bar{R} = \bar{0}$, $\bar{M}^0 = \bar{0}$) ger

$$\bar{F}_0 + m\bar{g} + \bar{T}_{AC} + \bar{T}_{BD} = \bar{0} \qquad (1)$$

$$\overline{OB} \times \bar{T}_{BD} + \overline{OA} \times \bar{T}_{AC} + \overline{OA} \times m\bar{g} = \bar{0} \qquad (2)$$

där $\overline{OB} = 3a\bar{e}_x$, $\overline{OA} = 6a\bar{e}_x$

(1) ger $\left(O_x - \frac{6}{7}T_{AC} - \frac{3}{5}T_{BD}\right)\bar{e}_x + \left(O_y + \frac{2}{7}T_{AC} - \frac{4}{5}T_{BD}\right)\bar{e}_y$

$+ \left(O_z - mg + \frac{3}{7}T_{AC}\right)\bar{e}_z = \bar{0} \qquad (1')$

(2) ger

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 3a & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5}T_{BD} & -\frac{4}{5}T_{BD} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 6a & 0 & 0 \\ -\frac{6}{7}T_{AC} & \frac{2}{7}T_{AC} & \frac{3}{7}T_{AC} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 6a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = \bar{0}$$

$$0 \cdot \bar{e}_x + \left(-\frac{18}{7}aT_{AC} + 6mga\right)\bar{e}_y +$$

$$+ \left(\frac{12}{7}aT_{AC} - \frac{12}{5}aT_{BD}\right)\bar{e}_z = \bar{0} \quad (2')$$

(1') ger x:led $O_x - \frac{6}{7}T_{AC} - \frac{3}{5}T_{BD} = 0$

y:led $O_y + \frac{2}{7}T_{AC} - \frac{4}{5}T_{BD} = 0$

z:led $O_z - mg + \frac{3}{7}T_{AC} = 0$

(2') ger x:led $0 = 0$

y:led $-\frac{18}{7}aT_{AC} + 6mga = 0$

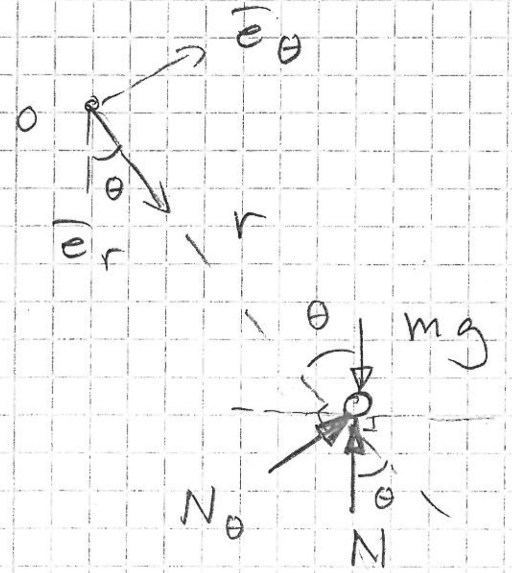
z:led $\frac{12}{7}aT_{AC} - \frac{12}{5}aT_{BD} = 0$

ger $T_{AC} = \frac{7}{3}mg$, $T_{BD} = \frac{5}{3}mg$ och

$O_x = 3mg$, $O_y = \frac{2}{3}mg$, $O_z = 0$

(<u>Alt.</u> svara på vektorform $\overline{T}_{AC}, \overline{T}_{BD}, \overline{F}_O$)

4) Frilägg P



Kinematik $(r-\theta)$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\omega^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2\dot{r}\omega$$

$$r = \frac{h}{\cos\theta}, \quad \theta = \omega t \quad (*)$$

$\sum \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_r \searrow$ $$mg\cos\theta - N\cos\theta = m(\ddot{r} - r\omega^2) \quad (1)$$

$\bar{e}_\theta \nearrow$ $$N_\theta + N\sin\theta - mg\sin\theta = m\,2\dot{r}\omega \quad (2)$$

Bestäm $\dot{r}, \ddot{r}$ mha $(*)$

$$\dot{r} = -\frac{h}{\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta)\cdot\dot{\theta} = h\omega\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\ddot{r} = h\omega\left[\frac{\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\cos^2\theta - \sin\theta\cdot 2\cos\theta\cdot(-\sin\theta)\cdot\dot{\theta}}{(\cos^2\theta)^2}\right]$$

$$\ddot{r} = h\omega^2\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\right)$$

(1) ger sedan

$$N(\theta) = mg - 2mh\omega^2 \frac{\tan^2\theta}{\cos^2\theta} \quad //$$

5) $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

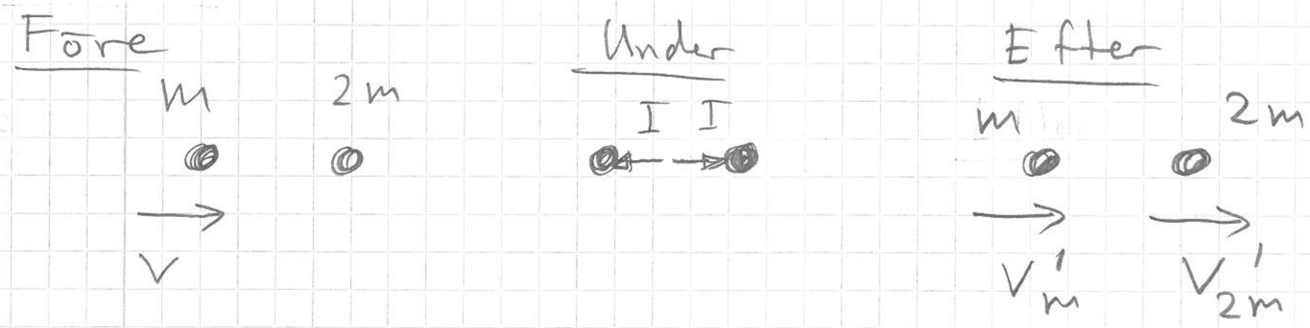
Från start till före stöten för m

$$0 = \frac{1}{2} m V^2 - mgh - \frac{1}{2} k \delta^2$$

med $k = mg/h$, $\delta = h/4$ fås

$$V^2 = \frac{33}{16} gh, \quad V = \frac{\sqrt{33}}{4}\sqrt{gh} \quad //$$

Stöten:



$\bar{I}_s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ för systemet ger

$$\rightarrow \quad 0 = mV_m' + 2mV_{2m}' - (m \cdot V + 2m \cdot 0)$$

ger $mV = mV_m' + 2mV_{2m}'$ (1)

Stöttalet $e = \dfrac{V_{2m}' - V_m'}{V - 0} = 1$

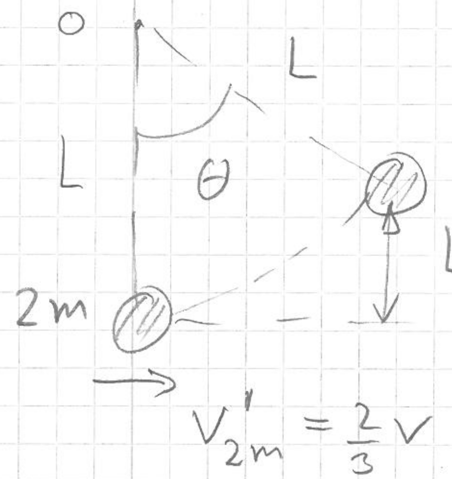
ger $V = V_{2m}' - V_m'$ (2)

(1), (2) ger
$$\begin{cases} V_{2m}' = \frac{2}{3} V \\ V_m' = -\frac{1}{3} V \end{cases}$$

$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

Efter stöten till maxutslaget för 2m

$$0 = \frac{1}{2} \cdot 2m \left(\frac{2}{3}v\right)^2 - 2mg\,(L - L\cos\theta)$$

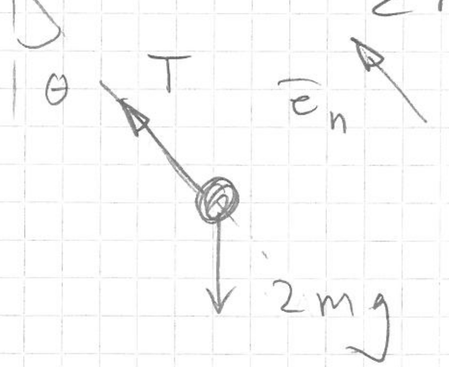


vändläget $V''_{2m} = 0$

ger med $L = h$ och $v = \frac{\sqrt{33}}{4}\sqrt{gh}$ att

$\cos\theta = \frac{39}{72}$ vid maxutslaget.

Frilägg vid maxutslaget



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

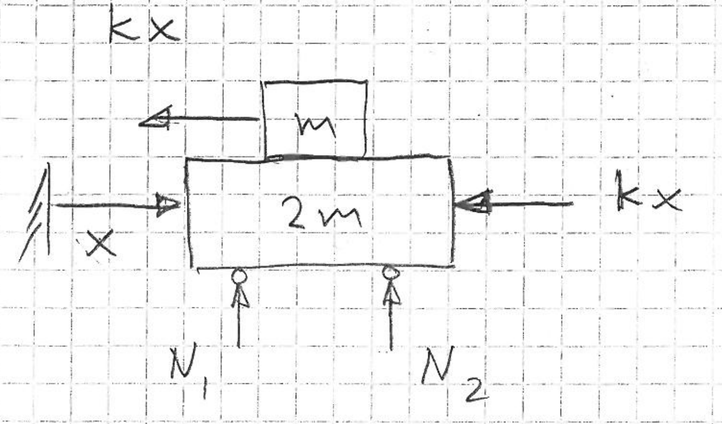
$T - 2mg\cos\theta = 2m \cdot a_n$

där $a_n = V''^{2}_{2m} / L = 0$

ger $T = 2mg\cos\theta$ eller $T = 2mg \cdot \frac{39}{72}$

$T = \frac{39}{36} mg$ //

6) Frilägg systemet 2m+m och finn x(t). Låt x=0 då fjädrarna är ospända.



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\longrightarrow$ $-2kx = 3m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m} x = 0 \quad \text{Ident. med}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$$

ger $\zeta = 0$, $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$, $x_1 = 0$

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

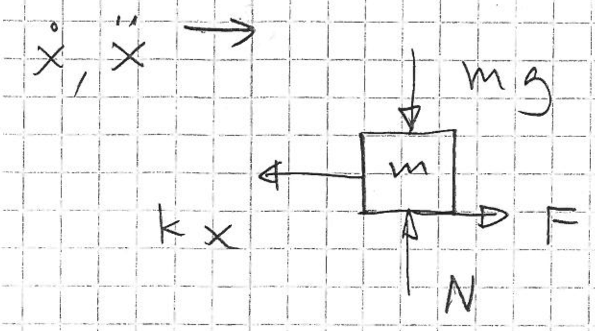
B.V. då $t=0$ $\quad x(0) = 0$ ger $A + 0 = 0$

$\dot{x}(0) = V_0$ ger $B\omega_n = V_0$

dvs $A = 0$, $B = \frac{V_0}{\omega_n}$. Således

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_n} \sin\omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

Frilägg lådan och använd friktionslagen



$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$$

$$\rightarrow \quad -kx + F = m\ddot{x}$$

$$\uparrow \quad N - mg = m \cdot 0$$

ger $\begin{cases} F = m\ddot{x} + kx \\ N = mg \end{cases}$

där $x = \dfrac{V_0}{w_n} \sin w_n t$, $\ddot{x} = -V_0 w_n \sin w_n t$

dvs $\begin{cases} F = \left(k \dfrac{V_0}{w_n} - m V_0 w_n\right) \sin w_n t \\ N = mg \end{cases}$

<u>Villkor:</u> $|F| \leq \mu_s |N|$; $N \geq 0$

ger $\left| V_0 \left(\dfrac{k}{w_n} - m w_n \right) \sin w_n t \right| \leq \mu m g$

$\forall t$

Med $\sin \omega_n t = 1$ fås $|F|_{max}$ dvs

$$V_0 \left(\frac{k}{\omega_n} - m\omega_n \right) \leq \mu m g \quad \text{och} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

ger $V_0 \leq \sqrt{6}\, \mu g \sqrt{\frac{m}{k}}$ //