Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2014-10-27, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER2, TER3, TER4, TERE

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00 och 17.30)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2014-10-27

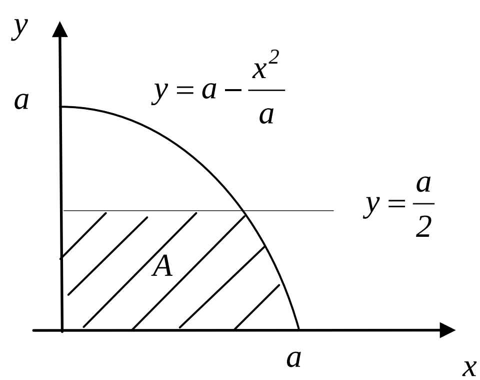
Teoridel:

1)

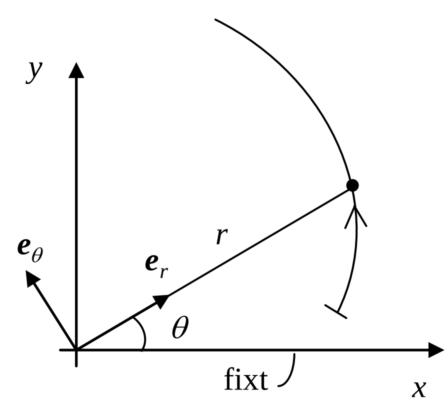
Centroiden för en yta definieras som bekant som punkten $\boldsymbol{r}_C = \dfrac{\int_A \boldsymbol{r}\, dA}{\int_A dA}$.

Utgå från definitionen ovan och visa att centroidens läge i x-led för arean A nedan som begränsas av kurvan $y = a - x^2/a$ och linjen $y = a/2$ samt av x- och y-axeln ges av:

$$x_c = \frac{9a}{8\left(4-\sqrt{2}\right)} \qquad \text{(1p)}$$



2)
En partikels bana i polära koordinater ges av $r = r(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där t är tiden, se figur.



Visa att partikelns hastighetsvektor $\boldsymbol{v}$ och accelerationsvektor $\boldsymbol{a}$ i polära koordinater kan skrivas

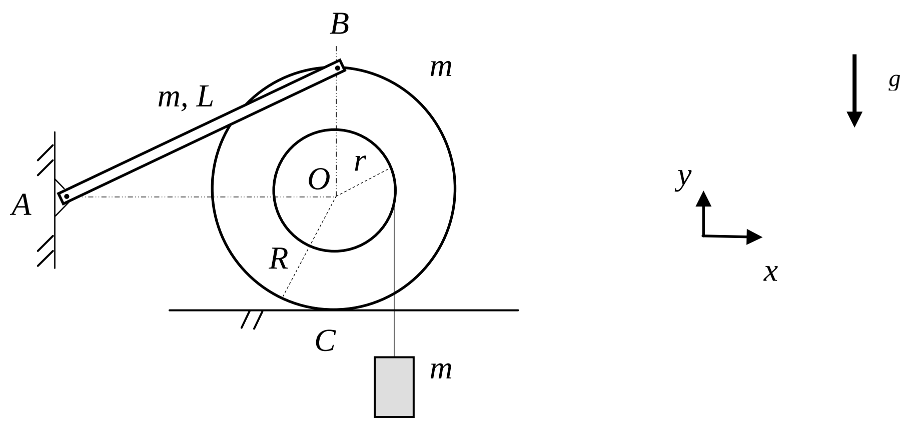
$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta \quad , \quad \boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \qquad \text{(2p)}$$

Problemdel:

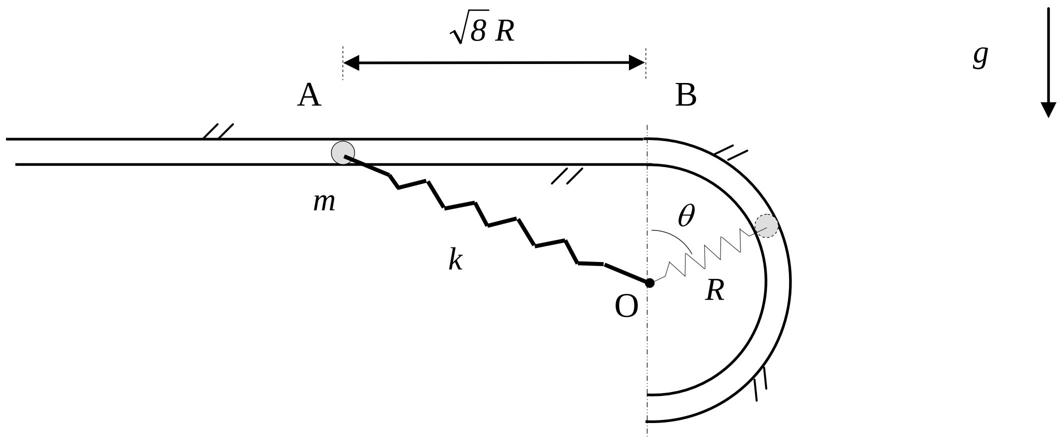
3)
En vikt med massan *m* är via ett snöre fäst i innerradien på en trissa med massan *m* enligt figur. Trissan består av två ihoplimmade cirkelskivor och har ytterradien *R* och innerradien $r = R/2$ och är placerad på ett strävt horisontellt underlag vid C. En stång *AB*, även den med massan *m*, är fäst i väggen vid *A* och i rullens högsta punkt *B* med friktionsfria leder (pin supports). Stången har längden $L = \sqrt{5}\,R$ och alla kroppar är homogena och snöret är vertikalt då det lämnar innerradien.

a) Beräkna reaktionskraften vid *A* samt normal- och friktionskraften vid *C* om det antas att systemets alla delar befinner sig i jämvikt. Svara med *x*- och *y*-komponenter. (2p)

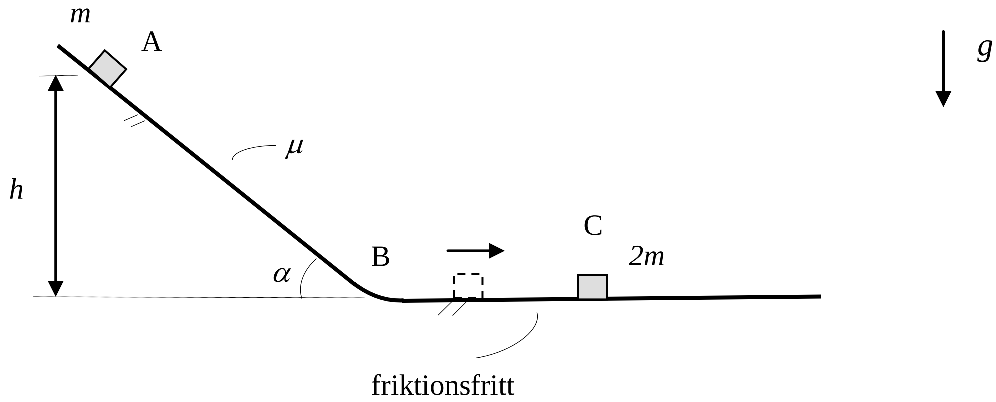
b) Hur stor måste friktionskoefficienten μ_s vid *C* minst vara för att systemet ska vara i vila. (1p)



4)
En partikel med massan m kan röra sig utan friktion i ett spår enligt figuren. I partikeln är en fjäder med fjäderkonstanten $k = mg / R$ fäst och den andra änden av fjädern är fixerad vid O. Fjädern har ospända längden $L_0 = R / 2$. Partikeln släpps utan hastighet vid A och rör sig först horisontellt fram till B där den sedan följer en cirkulär bana med radien R. Beräkna normalkraften från det omgivande godset på partikeln som funktion av vinkeln θ under den cirkulära delen av banan. Studera intervallet $0 \le \theta \le \pi$ och all rörelse sker i ett och samma vertikalplan. Det får antas att det är lite glapp mellan partikeln och godset så att partikeln är i kontakt med antingen undersidan eller ovansidan. (3p)

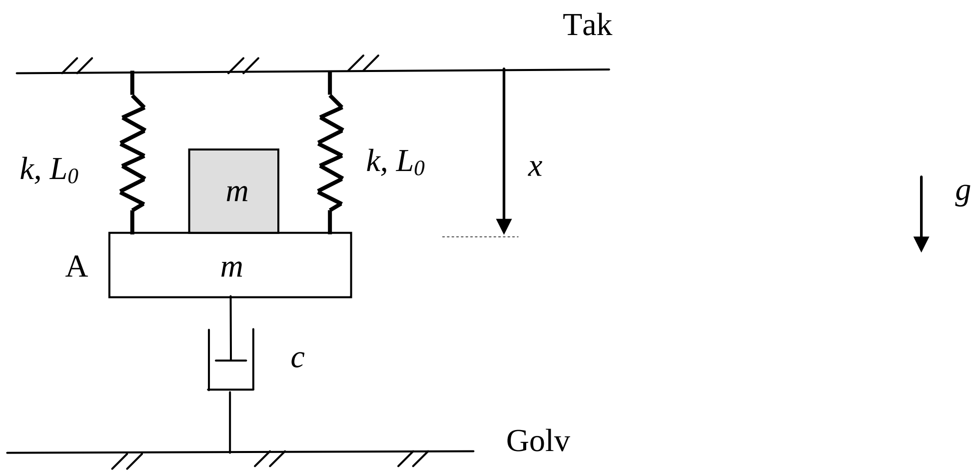


5)
En partikel med massan m släpps från vila från en höjd h vid läge A och glider sedan med friktion längs ett lutande plan ned till punkten B där en mjuk övergång sker till ett horisontellt friktionsfritt underlag. Partikeln fortsätter sedan till C där den stöter samman med en annan partikel som är stillastående och som har massan $2m$. Stöttalet mellan partiklarna är $e = 1 / 2$ och lutningsvinkeln $\alpha = 45^o$ samt friktionskoefficienten mellan A och B är $\mu = \mu_s = \mu_k = 1/2$. Beräkna partiklarnas hastigheter efter stöten. (3p)



6)
En partikel A med massan m är kopplad till ett dämpsystem bestående av två fjädrar med fjäderkonstanten k vardera samt en dämpare med dämpkonstanten $c = 4\sqrt{km}$ enligt figur. Man placerar sedan en låda med massan m ovanpå A. Systemet startas vid tiden $t=0$ genom att båda massorna ges en hastighet $v_0 = g\sqrt{m/k}$ nedåt från den position då fjädrarna har ospända längden L_0, dvs då $x=L_0$. Beräkna normalkraften mellan lådan och partikel A som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen. Ledning: Bestäm responsen $x(t)$ för systemet $2m$ först.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

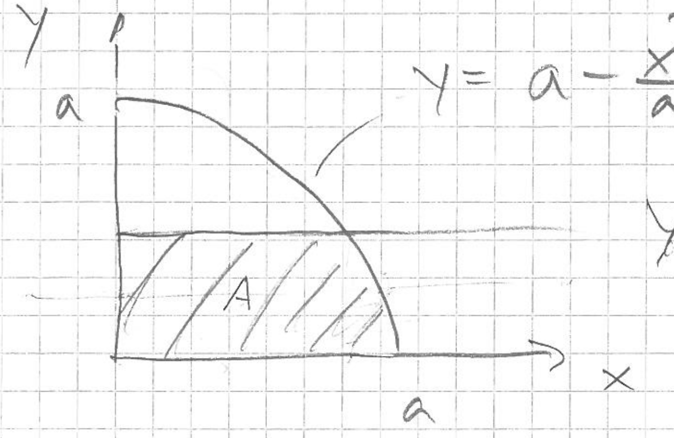
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)



$$y = a - \frac{x^2}{a} \; ; \quad x = \sqrt{a^2 - ay}$$

$$y = \frac{a}{2}$$

$$x_c = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} \; ; \qquad dA = dx\,dy$$

$$\int_A x\,dA = \int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{a}{2}} \left[\int_0^{\sqrt{a^2-ay}} x\,dx \right] dy$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2-ay}} dy = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{2}\left(a^2 - ay\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2 y - a\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{2}\left(a^2 \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\frac{a^2}{4} \right) = \frac{a^3}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{16}a^3 \; //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_0^{\frac{a}{2}} \left[\int_0^{\sqrt{a^2-ay}} dx \right] dy$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} \left[x \right]_0^{\sqrt{a^2-ay}} dy = \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a}\cdot\sqrt{a-y}\,dy$$

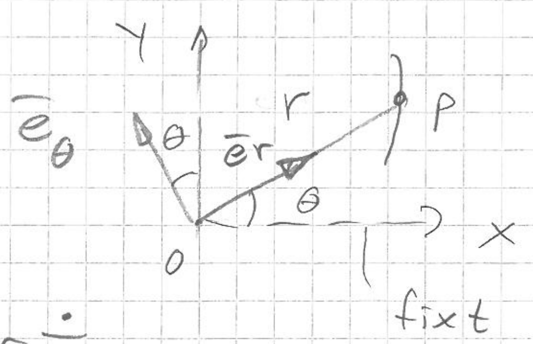
$$= \sqrt{a}\cdot\left[-(a-y)^{3/2}\cdot\frac{2}{3} \right]_0^{\frac{a}{2}} = -a^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$\int_A dA = -\frac{2}{3}\left(\frac{a^2}{2\sqrt{2}} - a^2\right) = \frac{a^2}{3}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad //$$

$$x_c = \frac{\frac{3}{16}a^3}{\frac{a^2}{3}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{9a}{8\left(4 - \sqrt{2}\right)} \quad //$$

V. S. V

2) <u>Def:</u> $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$, $\bar{a} = \dot{\bar{v}}$



$$\bar{r} = r\bar{e}_r$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r$$

Bestäm $\dot{\bar{e}}_r$, $\dot{\bar{e}}_\theta$ mha sambandet

$$\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y \qquad (\bar{e}_x, \bar{e}_y \text{ konst.})$$

$$\bar{e}_\theta = -\sin\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_r = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{e}_x + \cos\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{e}_y = \dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$$

$$\dot{\bar{e}}_\theta = -\cos\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{e}_x - \sin\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{e}_y = -\dot{\theta}\,\bar{e}_r$$

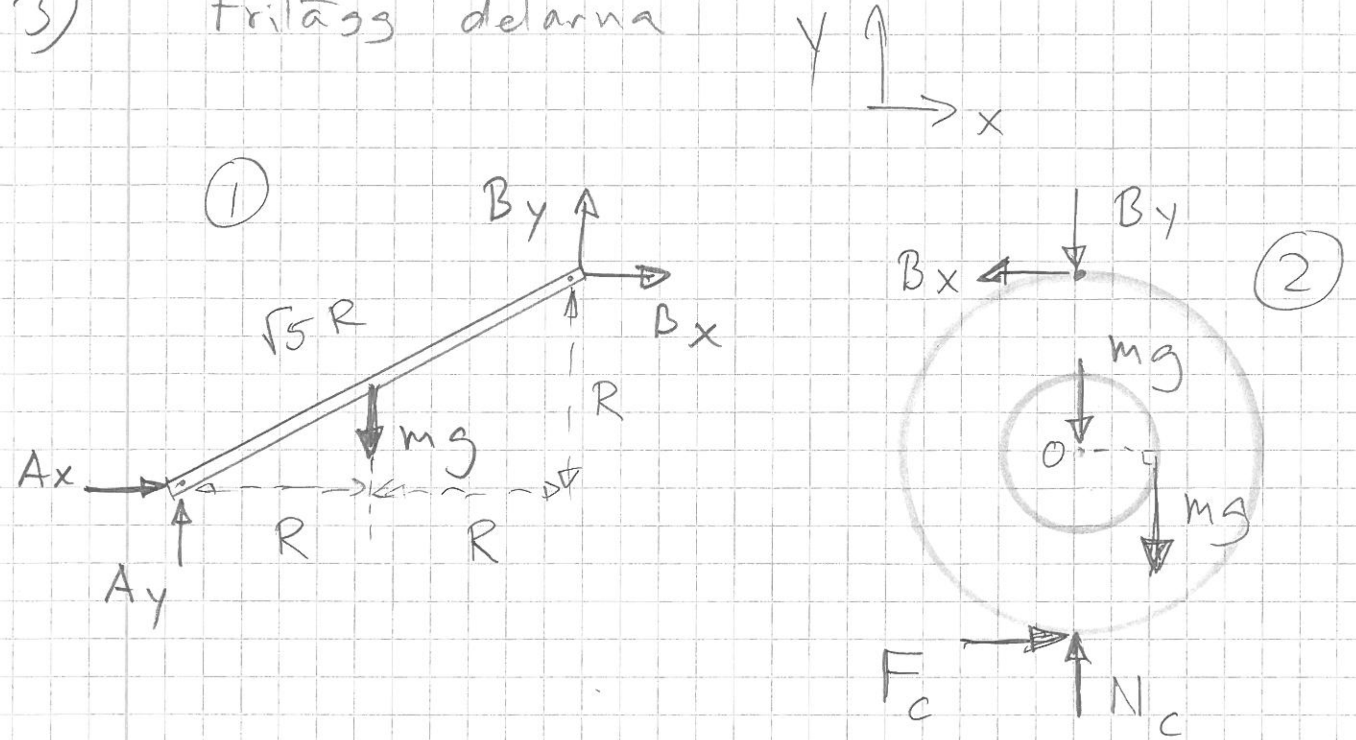
ger $\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta$ V.S.V. //

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{r}\bar{e}_r + \dot{r}\dot{\bar{e}}_r + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\bar{e}}_\theta$$

ger $\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{e}_\theta$ //

V.S.V.

3) Frilägg delarna



$\Sigma F_x = 0, \; \Sigma F_y = 0, \; \Sigma M_z = 0$ ger

1 $\rightarrow$ $A_x + B_x = 0$ (1)

$\uparrow$ $A_y - mg + B_y = 0$ (2)

$\circlearrowleft A$ $-mgR + B_y \cdot 2R - B_x \cdot R = 0$ (3)

2 $\rightarrow$ $F_c - B_x = 0$ (4)

$\uparrow$ $N_c - B_y - mg - mg = 0$ (5)

$\circlearrowleft O$ $B_x \cdot R + F_c R - mgr = 0$ (6)

(1) --- (6) med $r = \frac{R}{2}$ ger

$$\begin{cases} A_x = -\frac{1}{4}mg \\ A_y = \frac{3}{8}mg \end{cases} \qquad \begin{cases} F_c = \frac{1}{4}mg \\ N_c = \frac{21}{8}mg \end{cases}$$

//

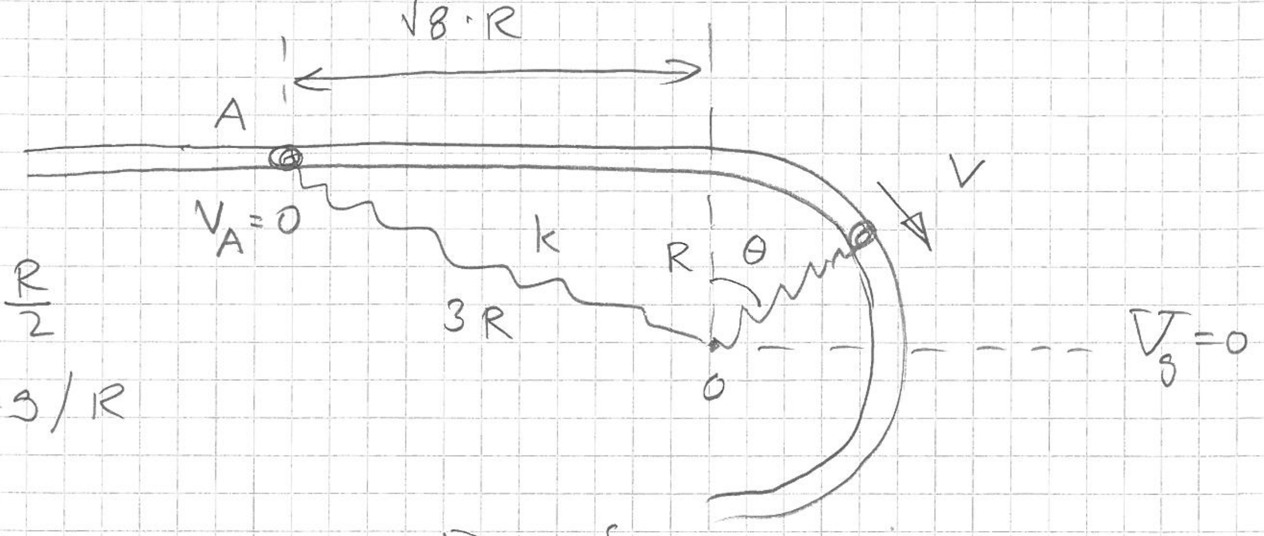
Friktionsvillkoret:

$$|\bar{F}_c| \leq \mu_s |\bar{N}_c| \quad \text{ger}$$

$$\frac{1}{4} mg \leq \mu_s \frac{21}{8} mg$$

dvs $\mu_s \geq \frac{2}{21}$ //

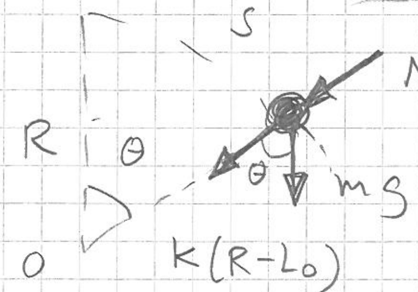
4)

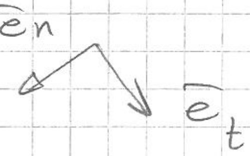


$L_0 = \frac{R}{2}$

$k = mg/R$

Frilägg m





Kinematik

$a_n = \frac{v^2}{R}$

$a_t = \ddot{s}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_n \swarrow \quad N + k(R - L_0) + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$

med $k = mg/R$, $L_0 = \frac{R}{2}$ fås

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg\cos\theta - \frac{mg}{2} \qquad (1)$$

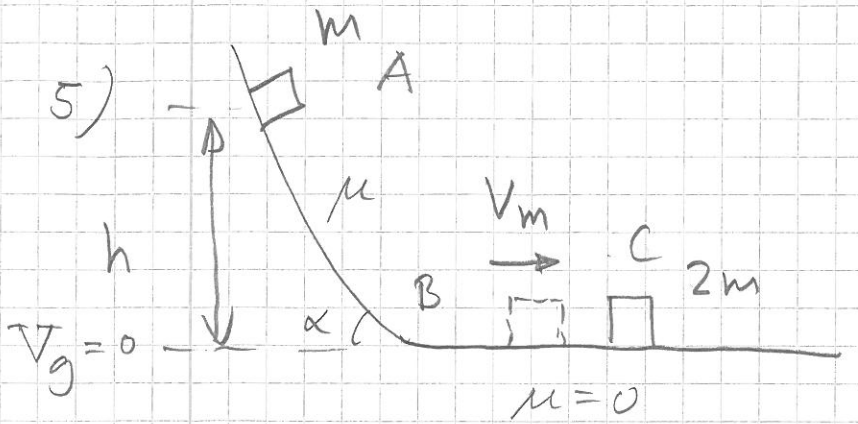
Bestäm $v(\theta)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

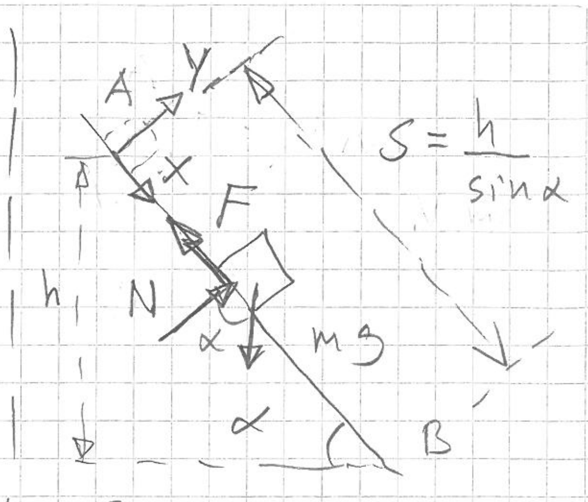
$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta - mgR + \frac{1}{2}k(R - L_0)^2$$
$$- \frac{1}{2}k(3R - L_0)^2$$ med k, L_0 som ovan fås

$v^2(\theta) = 8gR - 2gR\cos\theta$ ins i (1) ger

$$N(\theta) = \frac{15}{2}mg - 3mg\cos\theta \quad //$$

5)





$\nearrow \; N - mg\cos\alpha = 0$

Bestäm V_m före stöten mha $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$$U = \int_A^B \bar{F} \circ d\bar{r} \quad \text{där} \quad \bar{F} = -F\bar{e}_x = -\mu N \bar{e}_x = -\mu m g \cos\alpha \, \bar{e}_x$$

$$d\bar{r} = dx\,\bar{e}_x$$

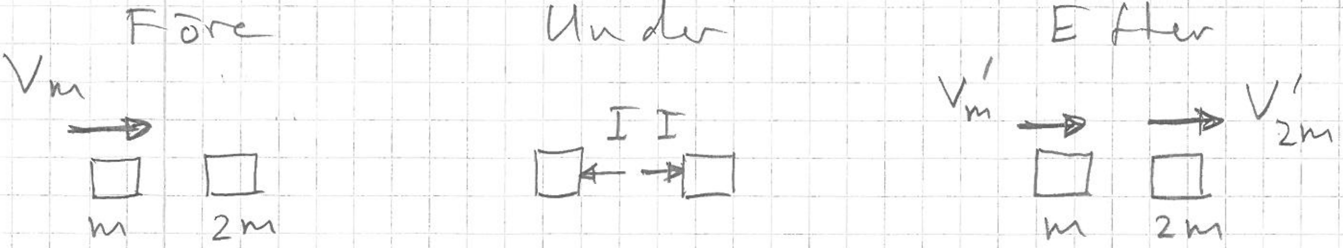
$$U = \int_0^S -\mu m g \cos\alpha \cdot dx = -\mu m g \cos\alpha \cdot S = -\mu m g \cos\alpha \frac{h}{\sin\alpha}$$

$\alpha = 45^\circ$; $\mu = \frac{1}{2}$ ger $U = -\frac{1}{2} mgh$

ger $-\frac{1}{2} mgh = \frac{1}{2} m V_m^2 - mgh$

dvs $V_m = \sqrt{gh}$ före stöten

Stöten:



$\bar{I}^S = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ för systemet m + 2m ger

$$\longrightarrow \quad 0 = m V_m' + 2m V_{2m}' - (m V_m + 2m \cdot 0)$$

ger $\quad v'_m + 2v'_{2m} = \sqrt{gh} \quad (1)$

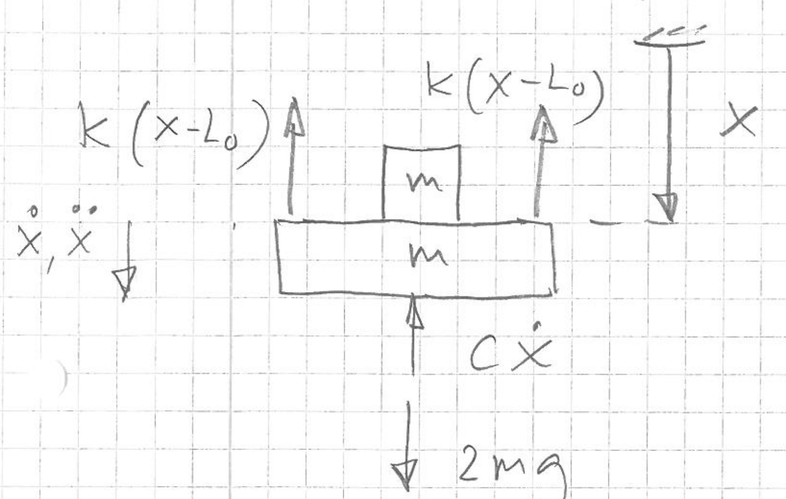
stöttalet: $\quad e = \dfrac{v'_{2m} - v'_m}{v_m - 0} = \dfrac{1}{2}$

ger $\quad v'_{2m} - v'_m = \frac{1}{2}\sqrt{gh} \quad (2)$

(1), (2) ger hastigheterna för m och 2m efter stöten:

$$\begin{cases} v'_m = 0 \\ v'_{2m} = \frac{1}{2}\sqrt{gh} \end{cases} \quad //$$

6) Friläгg systemet 2m och bestäm $x(t)$.



B.V. $t=0$

$x(0) = L_0$

$\dot{x}(0) = V_0 = g\sqrt{\frac{m}{k}}$

$c = 4\sqrt{km}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ $\downarrow$ $2mg - c\dot{x} - 2k(x-L_0) = 2m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k}{m}L_0$$

Ident. med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

$$\begin{cases} \frac{c}{2m} = 2\zeta\omega_n \; ; \; g + \frac{k}{m}L_0 = \omega_n^2 x_1 \\ \frac{k}{m} = \omega_n^2 \end{cases}$$ ger $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $x_1 = \frac{mg}{k} + L_0$

och med $c = 4\sqrt{km}$ fås $\zeta = 1$, dvs

$$x(t) = (A + B\cdot t)e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{k} + L_0$$

B.V. då $t = 0$

$x(0) = L_0$ ger $L_0 = A\cdot 1 + \frac{mg}{k} + L_0$

$\dot{x}(0) = V_0$ ger $V_0 = B\cdot 1 - A\cdot\omega_n\cdot 1$

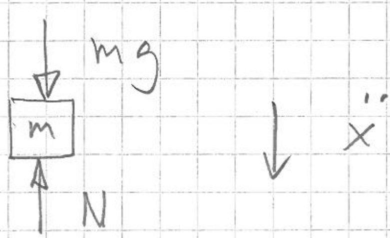
dvs $A = -mg / k$

$$B = V_0 + A\omega_n = g\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{mg}{k}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}} = 0$$

<u>Således:</u> $$x(t) = -\frac{mg}{k} e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{k} + L_0 \quad //$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frilägg Lådan:



$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} \qquad \downarrow \; mg - N = m\ddot{x}$$

$$N = mg - m\ddot{x} \qquad (1)$$

Derivera $x(t)$ 2 ggr. m.a.p. tiden ger $\ddot{x}$

$$\dot{x} = -\frac{mg}{k}(-\omega_n) e^{-\omega_n t} = g\frac{1}{\omega_n} e^{-\omega_n t}$$

$$\ddot{x} = g\frac{1}{\omega_n}(-\omega_n) e^{-\omega_n t} = -g e^{-\omega_n t}$$

ins. i (1) ger

$$N(t) = mg\left(1 + e^{-\omega_n t}\right) \quad //$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$