Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2014-08-25, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TERE, TER1

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00 och 17.30)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivningstillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

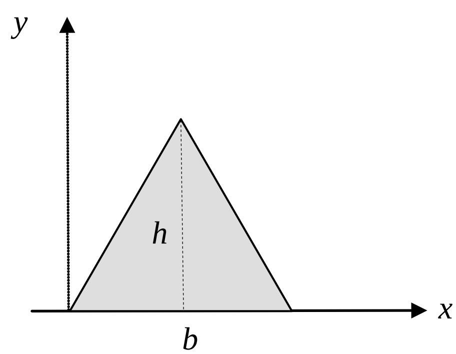
Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2014-08-25

Teoridel:

1)
Masscentrum för en kropp definieras som bekant som

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV}, \text{ där } \rho = \text{densiteten.}$$

Visa att masscentrums läge i *y*-led för en tunn homogen triangulär plåt med tjockleken *t*, basen *b* och höjden *h* enligt figur ges av $y_G = \frac{h}{3}$.   (1p)



2)
Definitionen av arbetet som uträttas av en kraft $\boldsymbol{F}$ under en förflyttning från läge $\boldsymbol{r}_1$ till $\boldsymbol{r}_2$ längs en kurva C lyder som bekant

$$U = \int_{\boldsymbol{r}_1, C}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r}$$

Utgå från definitionen ovan och visa att det arbete *U* som kraften från en linjär fjäder uträttar på en partikel P under en godtycklig förflyttning från ett läge 1 till ett läge 2 kan tecknas

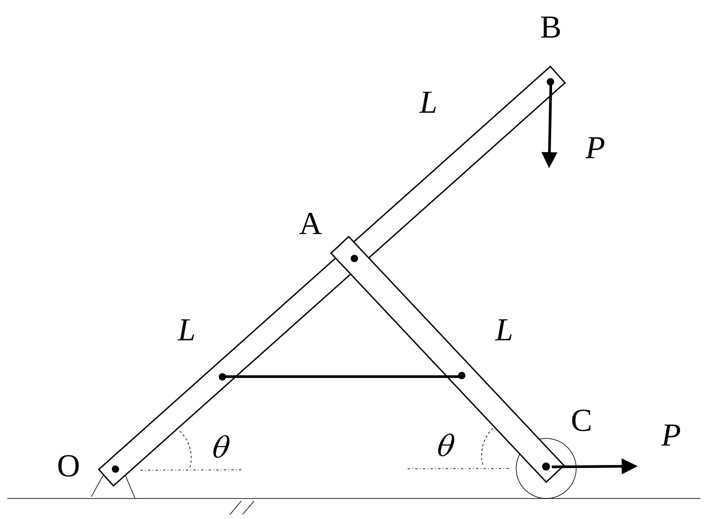
$$U = -(\, V_e(s_2) - V_e(s_1)\,), \qquad V_e(s) = \frac{1}{2} k s^2$$

där V_e är fjäderkraftens potentiella energi, *k* är fjäderkonstanten och *s* är förlängningen från obelastad längd L_0.   (2p)

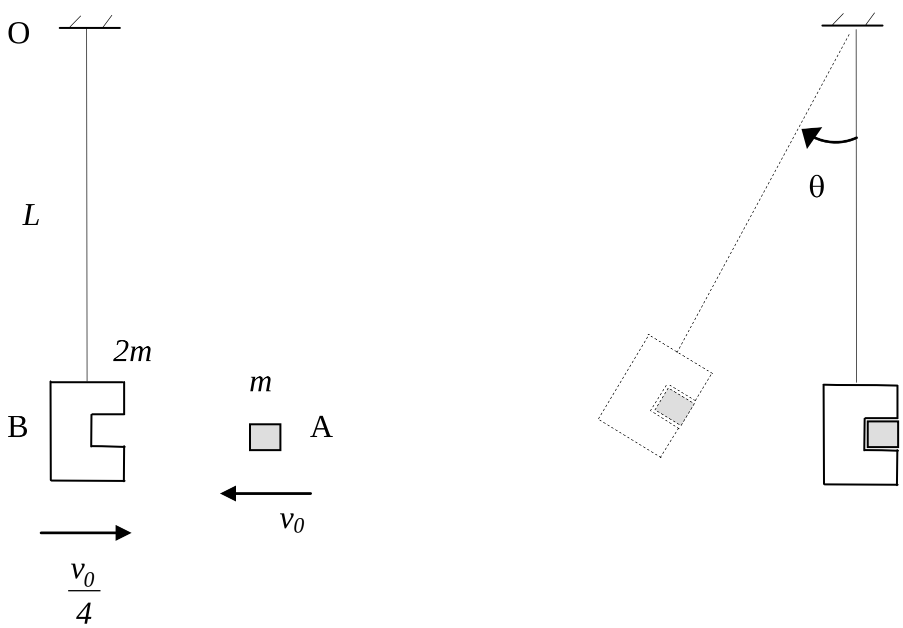
Problemdel:

3)
En stång OAB med längden *2L* och en stång AC med längden *L* är sammankopplade enligt figuren. Mellan mittpunkterna på sträckan OA och AC är ett horisontellt snöre fäst, se figur. Systemet belastas med en given vertikal kraft *P* vid B samt en given horisontell kraft *P* som angriper i rullens mittpunkt vid C. Båda stängerna har lutningsvinkeln θ. Beräkna dragkraften i snöret och normalkraften från underlaget på rullen vid C. Svaret får innehålla de givna storheterna *P*, *L*, θ. Delarnas tyngdkrafter samt friktionen i lederna vid O och A samt i rullen C kan försummas.

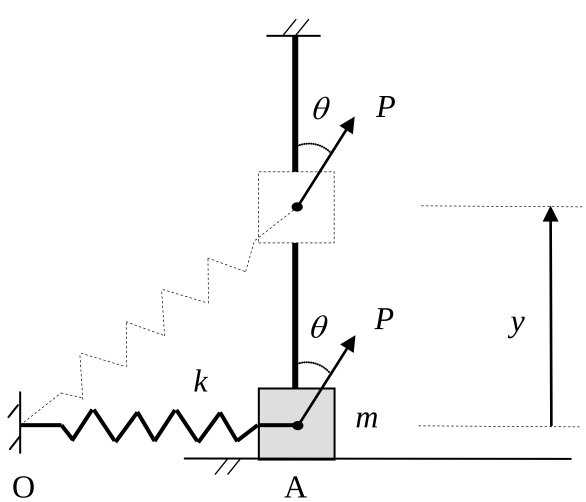
(3p)



4)
En pendel består av en partikel B med massan $2m$ som är upphängd i ett snöre enligt figur. Partikel B har hastigheten $v_0 / 4$ åt höger när den befinner sig i sitt lägsta läge. I detta läge skjuts en annan partikel A med massan m och med hastigheten v_0 åt vänster in i B och fastnar i B efter stöten (plastisk stöt $e=0$). Beräkna dragkraften i snöret som funktion av vinkeln θ för den rörelse som uppstår efter stöten för massorna $m+2m$. Avståndet OB är L och $v_0 = \sqrt{12\,gL}$. (3p)



5)
En partikel i form av en hylsa med massan m förflyttas av en konstant kraft P uppför en vertikal friktionsfri stång enligt figur. Kraften bildar hela tiden vinkeln θ mot stången.
I hylsan är en fjäder med fjäderkonstanten k fäst. Systemet startas utan hastighet vid läge A då fjädern är ospänd och OA horisontell. Beräkna hylsans hastighet som funktion av höjdkoordinaten y. Fjädern har ospända längden L_0. (3p)



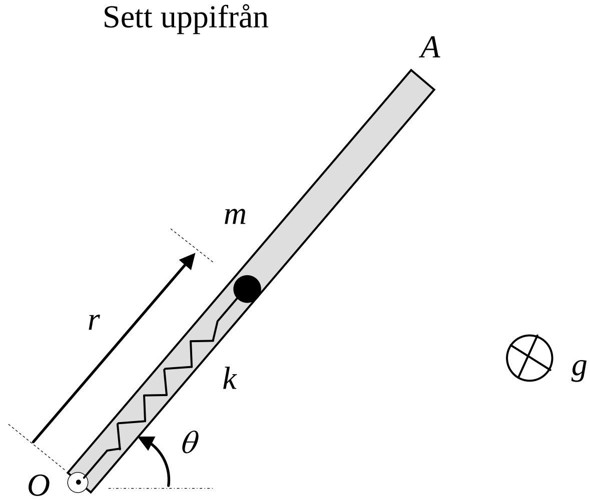
6)
En partikel med massan m kan friktionsfritt röra sig inuti ett horisontellt rör enligt figur. En fjäder med fjäderkonstanten k är fäst i partikeln och i röret vid O. Röret är fixerat vid O och roterar moturs med konstant vinkelhastighet $\dot{\theta} = \omega$ där $\omega < \sqrt{k/m}$. Vid tiden $t=0$ släpps partikeln i röret utan hastighet relativt röret då fjädern har ospända längden L_0 ($r = L_0$, $\dot{r} = 0$ då $t=0$). Man observerar att partikeln beskriver en svängningsrörelse inuti röret.

a) Ställ upp Newton's kraftlag i polära koordinater och visa att differentialekvationen som beskriver svängningsrörelsen ges av

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) r = \frac{k}{m} L_0 \,. \qquad \text{(1p)}$$

b) Beräkna partikelns läge r som funktion av tiden t. (2p)

Sett uppifrån



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n-t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r-\theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

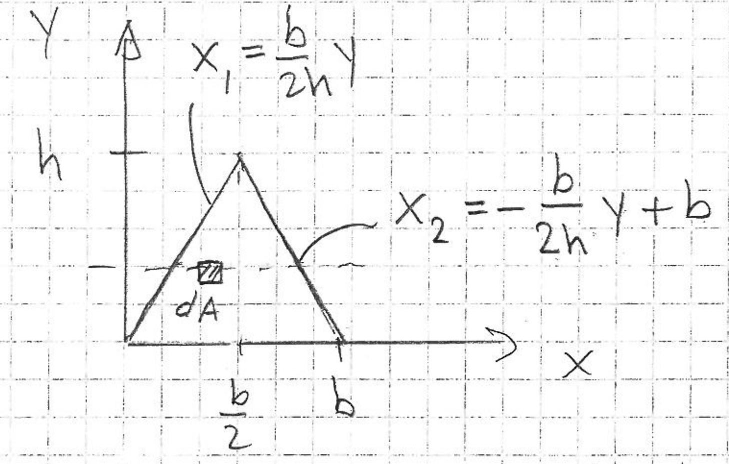
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)



$dx\,dy$ - element, $dA = dx\,dy$, $dV = t \cdot dA$

$\rho\, dV = \rho \cdot t\, dA$ g.r. med ρ, t = konst.

$$Y_G = \frac{\int_V y \rho \cdot t\, dA}{\int_V \rho \cdot t \cdot dA} = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA}$$

$$\int_A y\, dA = \int_A y\, dx\, dy = \int_0^h \left[y \int_{\frac{b}{2h}y}^{-\frac{b}{2h}y+b} dx \right] dy$$

$$= \int_0^h y \left[x \right]_{\frac{b}{2h}y}^{-\frac{b}{2h}y+b} dy = \int_0^h y \left(-\frac{b}{2h} y + b - \frac{b}{2h} y \right) dy$$

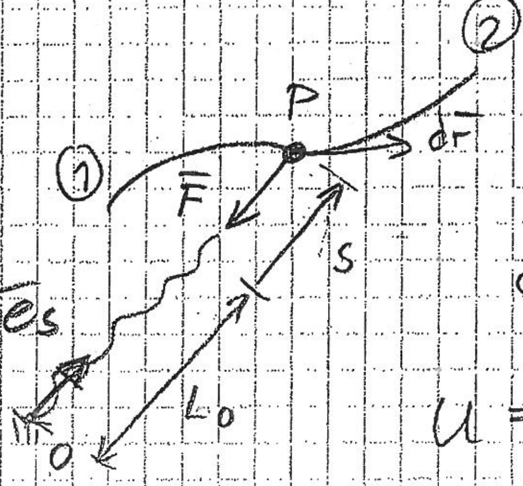
$$= \int_0^h y \left(-\frac{b}{h} y + b \right) dy = \int_0^h \left(-\frac{b}{h} y^2 + b y \right) dy =$$

$$= \left[-\frac{b}{h} \frac{y^3}{3} + b \frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{1}{6} b h^2$$

$$\int_A dA = \int_A dx\, dy = \int_0^h \left[\int_{\frac{b}{2h}y}^{-\frac{b}{2h}y+b} dx \right] dy = \int_0^h \left(-\frac{b}{h} y + b \right) dy = \frac{bh}{2}$$

g.r. $Y_G = \frac{1}{6} b h^2 \Big/ \frac{bh}{2}$ dvs $Y_G = \frac{h}{3}$ V.S.V

2)



$$\bar{F} = -ks\bar{e}_s$$

$$d\bar{r} = ds\,\bar{e}_s + dr_\perp\,\bar{e}_{\perp s}$$

$$U = \int_1^2 \bar{F} \circ d\bar{r} =$$

$$\bar{e}_s \circ \bar{e}_{\perp s} = 0$$

$$= \int_1^2 -ks\,\bar{e}_s \circ \left(ds\,\bar{e}_s + dr_\perp\,\bar{e}_{\perp s} \right) =$$

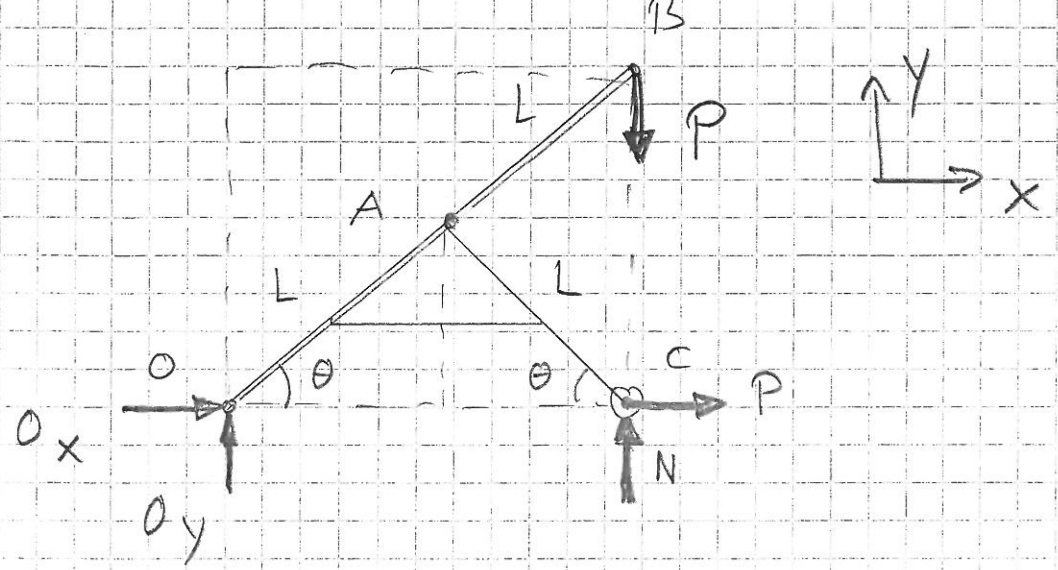
$$= \int_{s_1}^{s_2} -ks\,ds = -\frac{1}{2}k\left(s_2^2 - s_1^2\right) \quad \text{dvs}$$

$$U = -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right) =$$

$$= -\left(V_e(s_2) - V_e(s_1)\right) \quad \text{V.S.V.}$$

där $V_e(s) = \frac{1}{2}ks^2$

3) Frilägg systemet



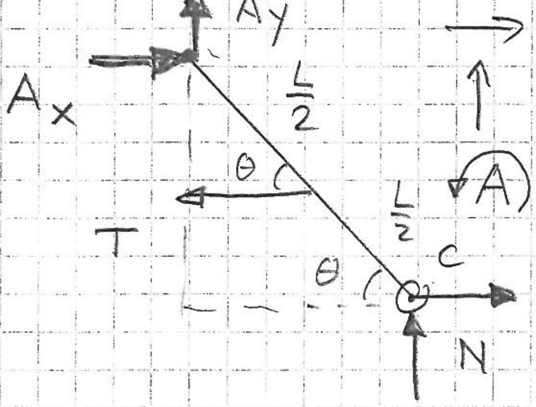
$\Sigma F_x = 0, \ \Sigma F_y = 0, \ \Sigma M_z = 0$ ger

$\rightarrow \quad O_x + P = 0 \qquad (1)$

$\uparrow \quad O_y + N - P = 0 \qquad (2)$

$\circlearrowleft O) \quad N \cdot 2L\cos\theta - P \cdot 2L\cos\theta = 0 \qquad (3)$

Frilägg AC



$\rightarrow \quad A_x - T + P = 0 \qquad (4)$

$\uparrow \quad N + A_y = 0 \qquad (5)$

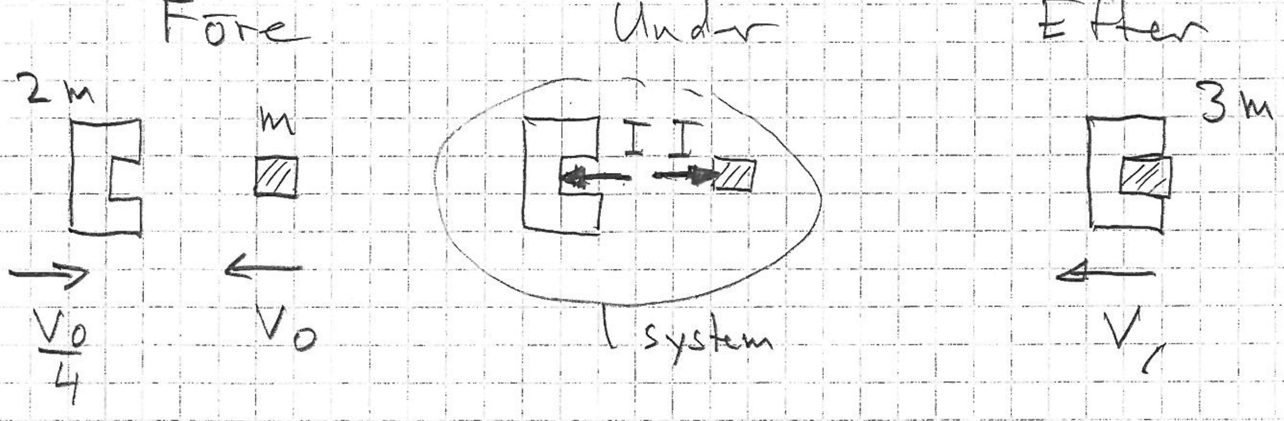
$\circlearrowleft A) \quad N \cdot L\cos\theta + PL\sin\theta + - T\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \qquad (6)$

(3), (6) ger $N = P$

$T = 2P\left(1 + \frac{1}{\tan\theta}\right)$ //

Stöten

4)

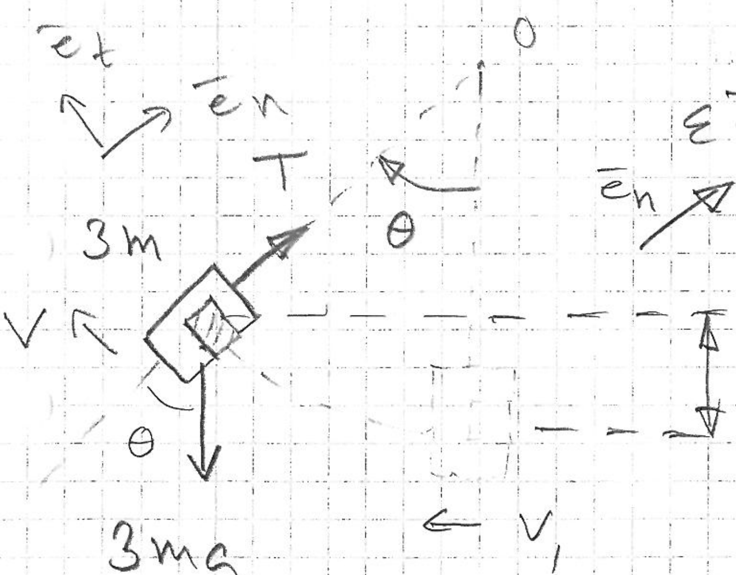


$\bar{I}^s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ för systemet ger

$\leftarrow \quad 0 = 3mV_1 - \left(-2m \cdot \frac{V_0}{4} + mV_0\right)$

ger $V_1 = \frac{1}{6} V_0$ efter stöten (1)

Frilägg ett godtyckligt läge efter stöten



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_n \nearrow \quad T - 3mg\cos\theta = 3m\frac{V^2}{L}$

$\Delta h = L - L\cos\theta$ (2)

(2) ger $T = 3mg\cos\theta + 3m\frac{V^2}{L}$ (3)

Bestäm $V(\theta)$ mha

$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$$0 = \frac{1}{2} 3m v^2 - \frac{1}{2} 3m v_1^2 + 3mg(L - L\cos\theta)$$

$$v^2 = v_1^2 - 2g(L - L\cos\theta)$$

med (1) $v_1 = \frac{1}{6} v_0 = \frac{1}{6}\sqrt{12gL}$ fås

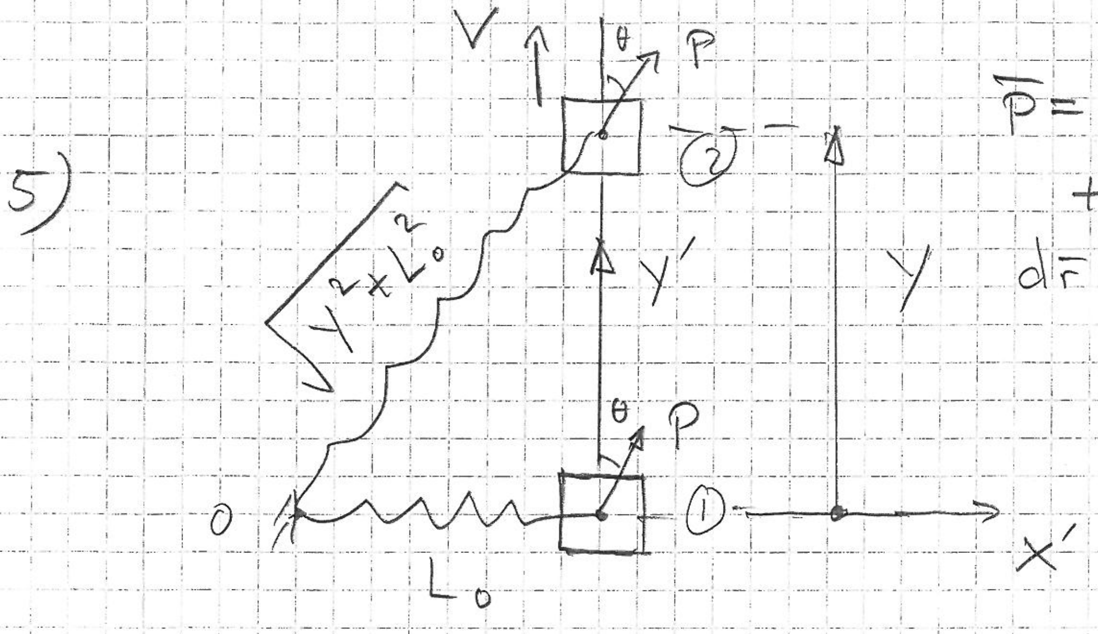
$$v^2(\theta) = 2gL\cos\theta - \frac{5}{3}gL$$

ins. i (3) ger

$$T(\theta) = 9mg\cos\theta - 5mg \quad //$$

[Notera att $T > 0$ hela tiden eftersom vändläget inträffar då $\cos\theta = \frac{5}{6}$ $(v=0)$]

5)



$$\bar{P} = P\sin\theta\, \bar{e}_{x'} + P\cos\theta\, \bar{e}_{y'}$$

$$d\bar{r} = dy'\, \bar{e}_{y'}$$

$$V_g = 0$$

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \qquad (1)$$

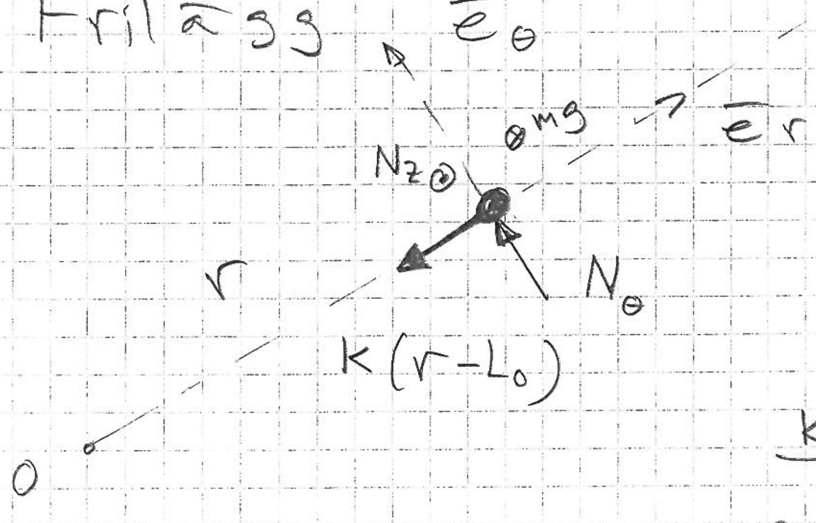
$$U = \int_{1}^{2} \bar{P} \cdot d\bar{r} = \int_0^y P\cos\theta\, dy' = P\cos\theta \left[y' \right]_0^y$$

$$= P\cos\theta \cdot y \quad , \quad (1) \text{ ger}$$

$$P\cos\theta \cdot y = \frac{1}{2} m V^2 + mgy + \frac{1}{2} k \left(\sqrt{y^2+L_0^2} - L_0 \right)^2 - \frac{1}{2} k \left(L_0 - L_0 \right)^2$$

$$\text{ger} \quad V(y) = \sqrt{\left(\frac{2P}{m}\cos\theta - 2g \right) y - \frac{k}{m} \left(\sqrt{y^2+L_0^2} - L_0 \right)^2}$$

6) Frilägg



$\dot{\theta} = \omega = \text{konst.}$

<u>Kinematik</u> $(r-\theta)$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a_z = 0$$

$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$$

$\bar{e}_r$: $$-k(r-L_0) = m(\ddot{r} - r\omega^2) \quad (1)$$

$\bar{e}_\theta$: $$N_\theta = m(0 + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (2)$$

$\bar{e}_z$: $$N_z - mg = m \cdot 0 \quad (3)$$

(1) ger $$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) r = \frac{k}{m} L_0 \quad \text{V.S.V}$$

Ident. med

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$$

ger $\zeta = 0$, $\omega_n^2 = \frac{k}{m} - \omega^2$, $x_1 = \frac{kL_0}{m\omega_n^2}$

Har lösn. $$r(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{kL_0}{m\omega_n^2}$$

B.V. då $t = 0$

$r(0) = L_0$ ger $A + \frac{kL_0}{m\omega_n^2} = L_0$

$\dot{r}(0) = 0$ ger $B\omega_n = 0$

dvs $A = L_0\left(1 - \frac{k}{m\omega_n^2}\right)$; $B = 0$

Således:

$$r(t) = L_0\left(1 - \frac{k}{m\omega_n^2}\right)\cos\omega_n t + \frac{kL_0}{m\omega_n^2}$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$