# Tentamen i Mekanik I del 1
## Statik och partikeldynamik

## TMME27

## 2014-01-08, kl 08.00-13.00

## Tentamenskod: TEN1

## Tentasal: G32, G33, G34, G36, G37

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 9.00 och 11.30)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2014-01-08

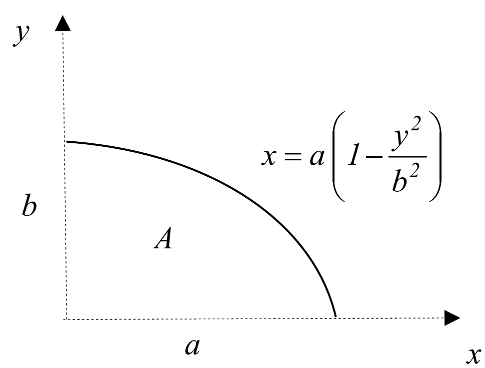
**Teoridel:**

1)

Centroiden för en yta definieras som bekant som punkten $\boldsymbol{r}_C = \dfrac{\int_A \boldsymbol{r}\, d\, A}{\int_A d\, A}$.

Utgå från definitionen ovan och visa att centroidens läge i $x$-led för arean $A$ som begränsas av $x$- och $y$-axeln samt av kurvan $x = a(1 - y^2 / b^2\ )$ i figuren ges av:

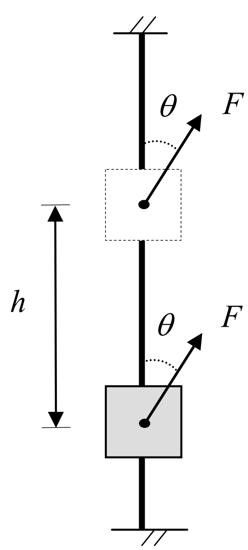
$$\boldsymbol{x}_C = \frac{2a}{5}$$ (1p)



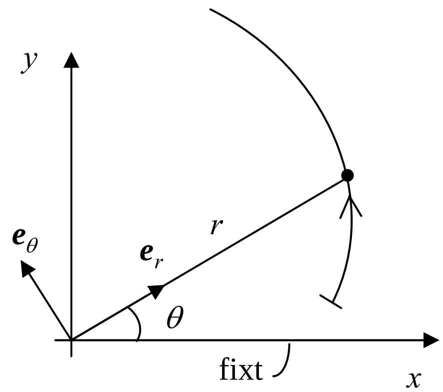

2a)
En partikel i form av en hylsa förflyttas av en konstant kraft $F$ höjden $h$ uppför en stång enligt figur. Kraften bildar hela tiden vinkeln $\theta$ mot stången. Utgå från definitionen av arbete, dvs $U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \circ d\,\boldsymbol{r}$ och visa att arbetet som kraften $F$ uträttar på partikeln under förflyttningen är

$$U = F\ h\ cos\theta$$

(1p)



2b)
En partikels bana i polära koordinater ges av $r = r(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där $t$ är tiden, se figur.



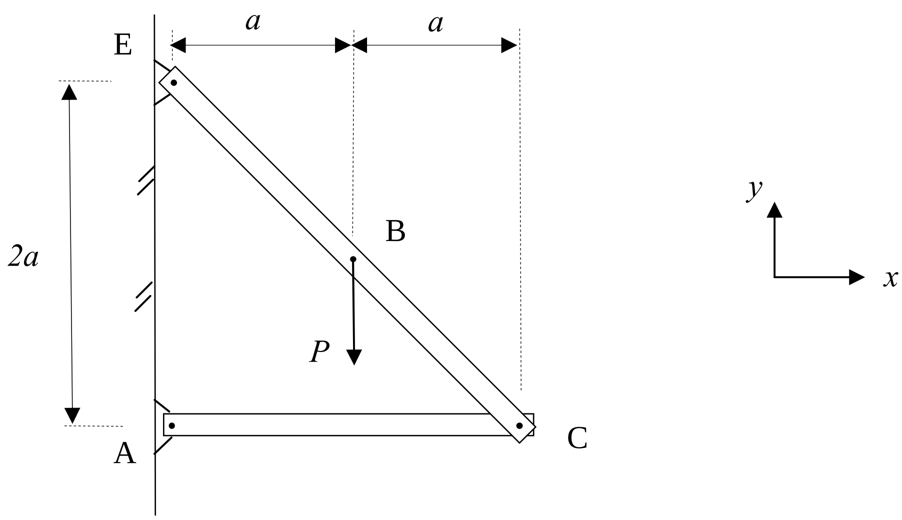

Visa att partikelns hastighetsvektor $\boldsymbol{v}$ i polära koordinater kan skrivas

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta \qquad (1p)$$

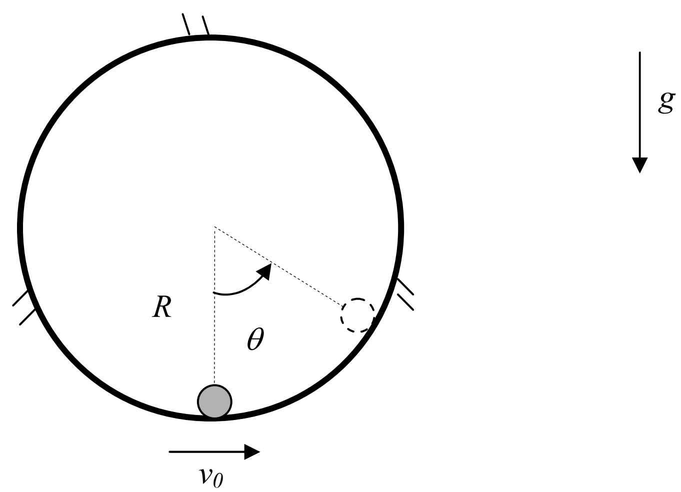
**Problemdel:**

3)
Två stänger AC och EC är sammankopplade enligt figur. Systemet belastas genom att man drar med en given vertikal kraft $P$ i mittpunkten B på stången EC. Delarnas massor kan försummas och måtten är givna i figuren. Stången AC är horisontell och lederna vid A, C och E är friktionsfria. Beräkna reaktionskraften vid A och E samt kraften från stången EC på AC vid C, svara med komponenterna i $x$ och $y$-led.

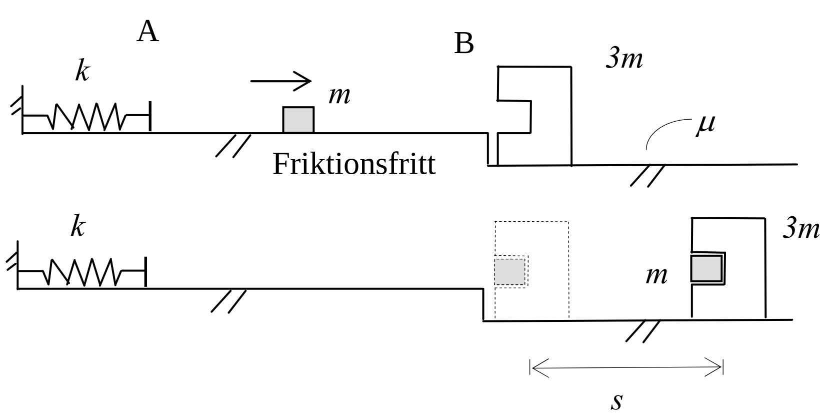
(3p)



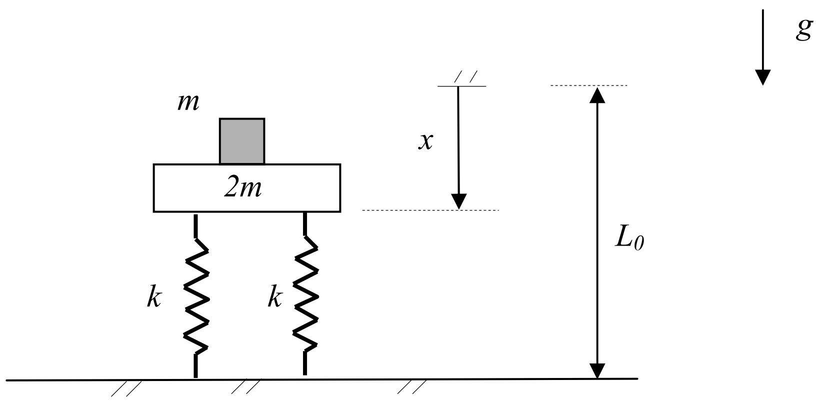
4)
En partikel med massan $m$ kan friktionsfritt röra sig på insidan av ett fixt cirkulärt rör med radien $R$ enligt figur. När partikeln är i lägsta punkten har den hastigheten $v_0 = \sqrt{8gR}$ och all rörelse sker i ett och samma vertikalplan.
a) Beräkna normalkraften från röret på partikeln som funktion av vinkeln $\theta$. (2p)
b) Beräkna största och minsta värdet på normalkraften under rörelsen och ange vart dessa max och min inträffar. (1p)




5)
En partikel med massan $m$ är intryckt i en fjäder vid A med fjäderkonstanten $k$ och fjäderns deformation (ihoptryckning) i detta läge är $\delta$. Partikeln släpps från vila i detta intryckta läge och rör sig sedan längs ett horisontellt friktionsfritt underlag fram till B där den kolliderar med en stillastående partikel med massan 3$m$, se figur. Efter stöten fastnar partiklarna i varandra i en plastisk stöt ($e=0$). Beräkna bromssträckan $s$ då massorna $m+3m$ stannat om friktionskoefficienten är $\mu$ mot underlaget för rörelsen efter stöten enligt figur. (3p)



6)
Ett svängande system består av en platta med massan *2m* som är fäst i två likadana fjädrar med fjäderkonstanten *k* vardera. På plattan placeras sedan en låda med massan *m* enligt figur. Systemet startas genom att man släpper systemet från vila vid läget $x=0$, dvs då fjädrarna är ospända. Låt tiden $t = 0$ då systemet startas och fjädrarnas ospända längd är $L_0$.
a) Beräkna läget *x* som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen. (2p)
b) Beräkna normalkraften mellan lådan och plattan som funktion av tiden. (1p)



**Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:**

## Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen $\kappa$ och krökningsradien $\rho$ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

## Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen $x_h$ ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

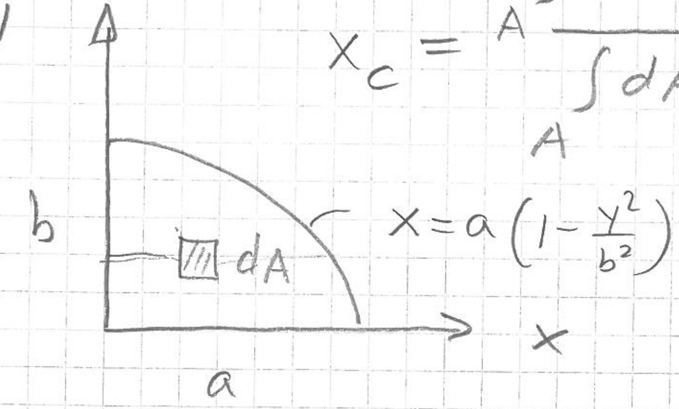
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen $x_p$ vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1]om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)




$$x_c = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$

dxdy – element, $dA = dx\,dy$

$$\int_A x\,dx\,dy = \int_0^b \left[ \int_0^{a(1-\frac{y^2}{b^2})} x\,dx \right] dy =$$

$$= \int_0^b \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{a(1-\frac{y^2}{b^2})} dy = \int_0^b \frac{1}{2} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 dy$$

$$= \int_0^b \frac{1}{2} a^2 \left(1 + \frac{y^4}{b^4} - 2\frac{y^2}{b^2}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left[ y + \frac{1}{b^4}\frac{y^5}{5} - \frac{2}{b^2}\frac{y^3}{3} \right]_0^b = \frac{1}{2} a^2 \left(b + \frac{b}{5} - \frac{2}{3} b\right)$$

$$= \frac{4}{15} a^2 b \quad //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_0^b \left[ \int_0^{a(1-\frac{y^2}{b^2})} dx \right] dy =$$

$$= \int_0^b a\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = a\left[ y - \frac{1}{b^2}\frac{y^3}{3} \right]_0^b = \frac{2}{3} ab \quad //$$

$$x_c = \frac{4}{15} a^2 b \Big/ \frac{2}{3} ab = \frac{2}{5} a \quad // \quad \text{V.S.} \checkmark$$

2a) $$U = \int_{①}^{②} \bar{F} \circ d\bar{r}$$

$$\bar{F} = F\sin\theta\,\bar{e}_x + F\cos\theta\,\bar{e}_y$$

$$\bar{r} = y\bar{e}_y \;;\; d\bar{r} = dy\,\bar{e}_y \quad \text{ger}$$

$$U = \int_0^h F\cos\theta\,dy = F\cos\theta \cdot h \quad \text{V.S.V}$$

2b) $$\bar{r} = r\bar{e}_r$$

$$\bar{V} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r$$

$$\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y \qquad \bar{e}_x, \bar{e}_y \text{ fixa}$$

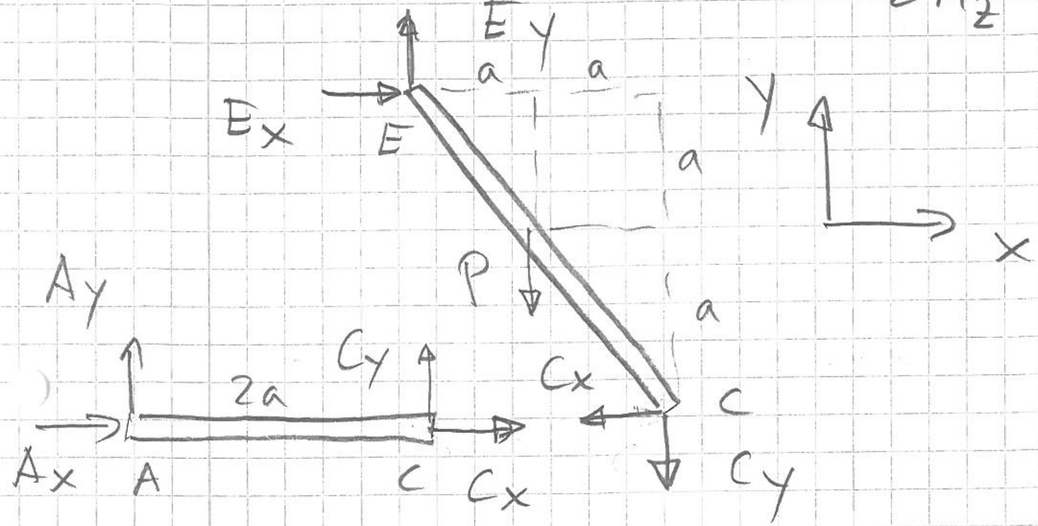
$$\bar{e}_\theta = -\sin\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\,\bar{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\,\bar{e}_y = \dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$$

ger $$\bar{V} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta \quad \text{V.S.V.}$$

3) Friläggs

$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$,
$\Sigma M_z = 0$.




Stång AC: $\rightarrow$ $A_x + C_x = 0$ (1)

$\uparrow$ $A_y + C_y = 0$ (2)

$\circlearrowleft A$ $C_y \cdot 2a = 0$ (3)

Stång EC: $\rightarrow$ $E_x - C_x = 0$ (4)

$\uparrow$ $E_y - P - C_y = 0$ (5)

$\circlearrowleft E$ $-P \cdot a - C_x \cdot 2a - C_y \cdot 2a = 0$ (6)

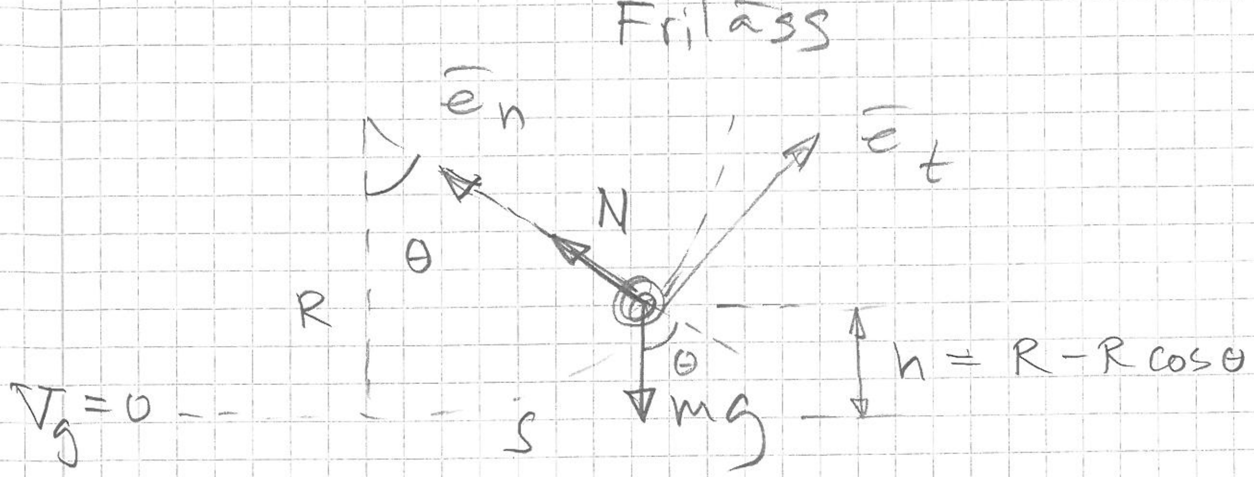
(1) --- (6) ger

$A_x = \frac{P}{2}$ ; $E_x = -\frac{P}{2}$ ; $C_x = -\frac{P}{2}$

$A_y = 0$ $\quad E_y = P$ $\quad C_y = 0$

eller, $\bar{F}_A = \frac{P}{2}\bar{e}_x$ ; $\bar{F}_E = -\frac{P}{2}\bar{e}_x + P\bar{e}_y$ ; $\bar{F}_C = -\frac{P}{2}\bar{e}_x$

4)




$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_n$ ↖ : $N - mg\cos\theta = m\dfrac{V^2}{R}$ (1)

$\bar{e}_t$ ↗ $-mg\sin\theta = m\ddot{s}$ (2)

(1) ger $N = m\dfrac{v^2}{R} + mg\cos\theta$ (*)

Bestäm $v(\theta)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 + mg(R - R\cos\theta)$$

$$v^2 = V_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)$$

ger i (*) $N(\theta) = mg(6 + 3\cos\theta)$ //

$N_{max} = 9mg$ då $\theta = 0$

$N_{min} = 3mg$ då $\theta = \pi$

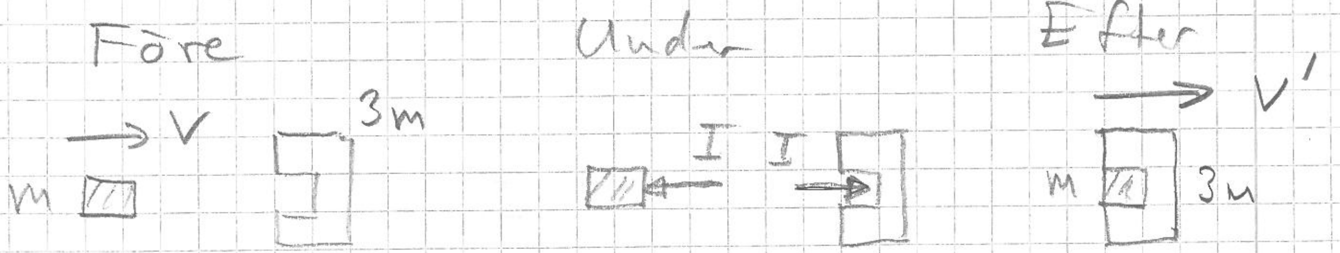
5)

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad \text{ger}$$

A-B $\quad 0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} k \delta^2$

ger $\quad v = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \delta \quad$ före stöten

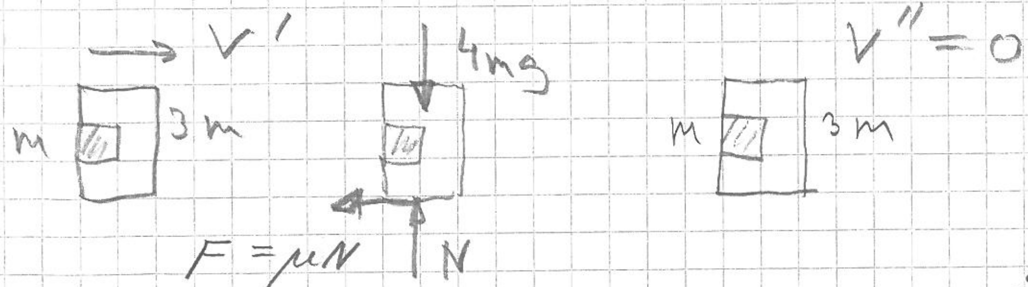
Stöten




$\bar{I}^s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ för systemet ger

$\longrightarrow \quad 0 = 4mv' - mv \quad$ dvs $\quad v' = \frac{v}{4}$ //

Efter stöten till vila




$\uparrow \; N - 4mg = 0$

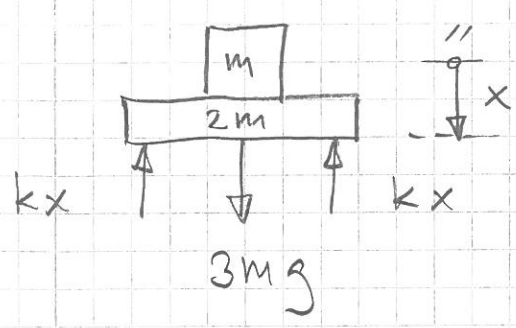
$N = 4mg$

$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad$ där $\quad U = \int_0^s -F\,dx = -\mu 4mgs.$

$-\mu 4mg \cdot s = 0 - \frac{1}{2} 4m v'^2$

$s = \frac{v'^2}{2\mu g} = \frac{1}{2\mu g} \cdot \frac{v^2}{16} = \frac{1}{32\mu g} \cdot \frac{k}{m} \delta^2$ //

6) Frilägg $(m+2m)$ och finn $x(t)$.




($x = 0$ då fjädrarna är ospända)

Bestäm $x(t)$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\downarrow \quad 3mg - 2kx = 3m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = g \quad (1)$$

Ident. $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

ger $\quad 0 = 2\zeta\omega_n \,, \quad \frac{2k}{3m} = \omega_n^2 \,, \quad g = \omega_n^2 x_1$

dvs $\zeta = 0 \,, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \,, \quad x_1 = 3mg/2k$

(1) har lösn.

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{3mg}{2k}$$

B.V. då $t = 0$

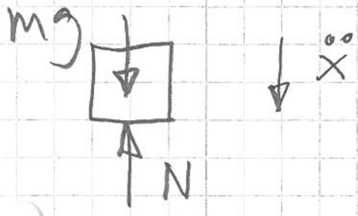
$x(0) = 0 \;; \quad 0 = A + B \cdot 0 + \frac{3mg}{2k}$

$\dot{x}(0) = 0 \;; \quad 0 = -A\omega_n \cdot 0 + B\omega_n \cdot 1$

dvs $\quad A = -\frac{3mg}{2k} \,, \quad B = 0$

ger $x(t) = -\frac{3mg}{2k}\cos\omega_n t + \frac{3mg}{2k}$ //

Bestäm $N(t)$. Frilägg $m$ enbart.




$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$$\downarrow \quad mg - N = m\ddot{x} \qquad (2)$$

där $\ddot{x} = \frac{3mg}{2k}\omega_n^2 \cos\omega_n t = g\cos\omega_n t$

(2) ger $N(t) = mg(1 - \cos\omega_n t)$

<u>Således:</u>

$$x(t) = -\frac{3mg}{2k}\cos\omega_n t + \frac{3mg}{2k}$$

$$N(t) = mg(1 - \cos\omega_n t)$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ //