Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2013-10-28, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER1, G32, G33, G34, G35, G36, G37

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00 och 17.30)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2013-10-28

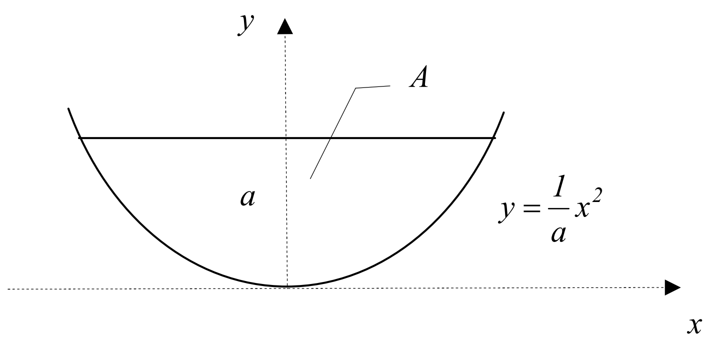
Teoridel:

1)

Centroiden för en yta definieras som bekant som punkten $\boldsymbol{r}_C = \dfrac{\int_A \boldsymbol{r}\, dA}{\int_A dA}$.

Utgå från definitionen ovan och visa att centroidens läge i y-led för arean A som begränsas av kurvan $y = x^2/a$ och linjen $y = a$ i figuren ges av:

$$y_C = \frac{3a}{5} \qquad \text{(1p)}$$

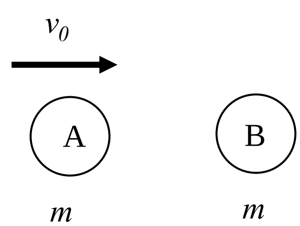


2)

Stöttalet e för en rak central stöt mellan två partiklar A och B ges som bekant av $e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$.

Antag att två puckar A och B kolliderar i en sådan stöt enligt figuren nedan, där puck A har hastigheten v_0 före stöten medan puck B står stilla före stöten. Puckarna har samma massa m. Energiförlusten för stöten definieras av $E = \left|\Delta T_{system}\right|$, dvs skillnaden i kinetisk energi för systemet före och efter stöten. Utgå från stötimpulsekvationen och stöttalet e samt definitionen av kinetisk energi och visa att energiförlusten under denna stöt ges av uttrycket:

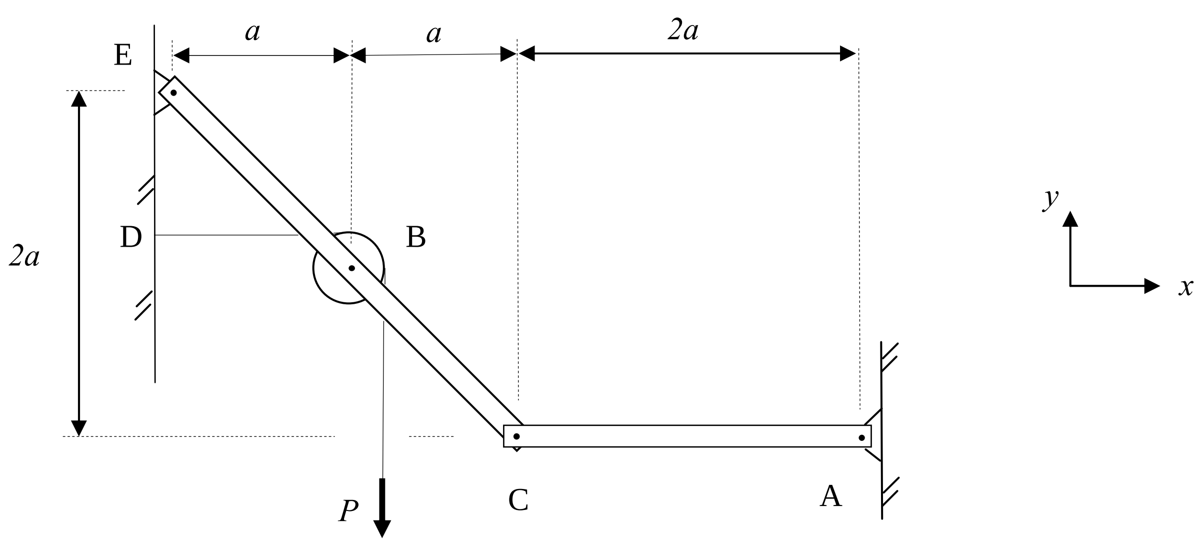
$$E = \frac{1}{4} m v_0^2 (1 - e^2) \qquad \text{(2p)}$$



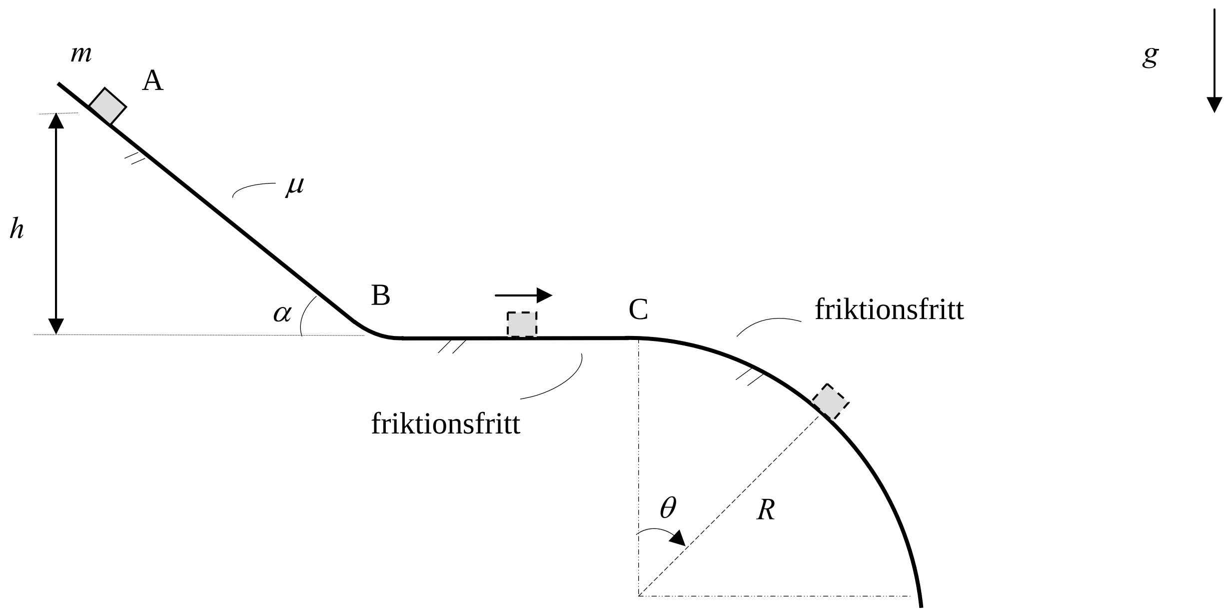
Problemdel:

3)
Två stänger EC och CA är sammankopplade enligt figur. Systemet belastas genom att man drar med en given vertikal kraft P i ett snöre som löper över en trissa och sedan fäst i en vägg vid D. Trissan är fäst i mittpunkten B på stången EC. Delarnas massor kan försummas och måtten är givna i figuren. Stången CA och snördelen vid D är horisontella och trissans radie är r. Ingen friktion. Beräkna reaktionskraften vid E och A, svara med komponenterna i x och y-led.

(3p)



4)
En partikel med massan m släpps från vila vid läge A och glider sedan med friktion längs ett lutande plan ned till punkten B där en mjuk övergång sker till ett horisontellt friktionsfritt underlag. Partikeln fortsätter sedan till C där en övergång sker till en cirkulär del med radien R, även den friktionsfri, se figur. Låt höjden $h = R$ och lutningsvinkeln $\alpha = 45^o$ samt friktions-koefficienten $\mu = \mu_s = \mu_k = 4/5$ mellan A och B. Försumma partikelns dimensioner.
Beräkna normalkraften från underlaget på partikeln som funktion av vinkeln θ för den cirkulära delen av banan. Ange även för vilken vinkel $\theta = \theta^*$ partikeln förlorar kontakten med underlaget. (3p)

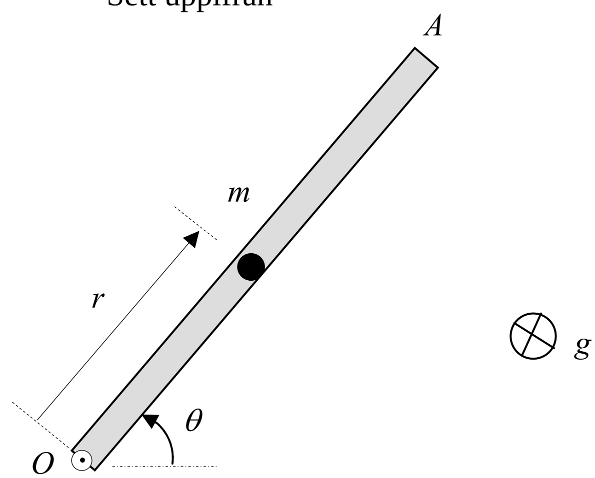


5)

En partikel med massan m kan friktionsfritt röra sig inuti ett horisontellt rör enligt figur. Röret är fixerat vid O och roterar moturs med konstant vinkelhastighet $\dot{\theta} = \omega$. Partikelns läge ges av *(r, θ),* där r är avståndet från O till partikeln och θ rörets rotationsvinkel, se figur. Vid tiden $t=0$ startas partikeln genom att ett snöre med längden r_0 mellan O och partikeln klipps av, dvs $r = r_0$, $\dot{r} = 0$ då $t=0$. Beräkna för den efterföljande rörelsen:

a) den horisontella normalkraften från röret på partikeln som funktion av tiden t (2p)

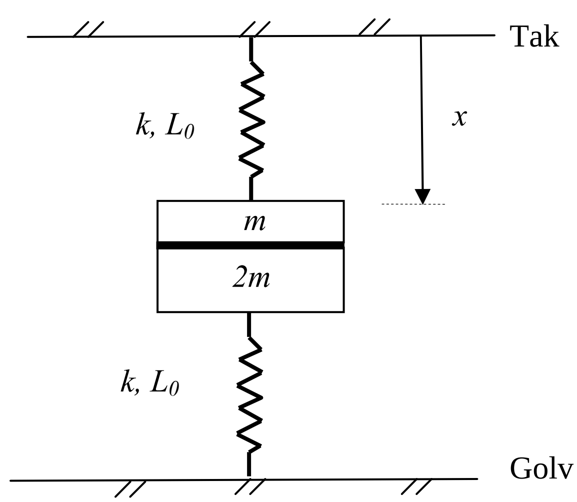
b) partikelns fart $|\boldsymbol{v}|$ som funktion av avståndet r. (1p)



6)

Ett svängande system består av två partiklar med massan m respektive $2m$ som är sammanfogade med en limfog. I varje partikel är en fjäder fäst med fjäderkonstanten k och ospända längden L_0 enligt figur. Systemet startas genom att massorna släpps från vila då läget $x=L_0$, dvs när båda fjädrarna är ospända. Beräkna dragkraften i limfogen mellan partiklarna som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen, låt tiden $t=0$ då systemet startas.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

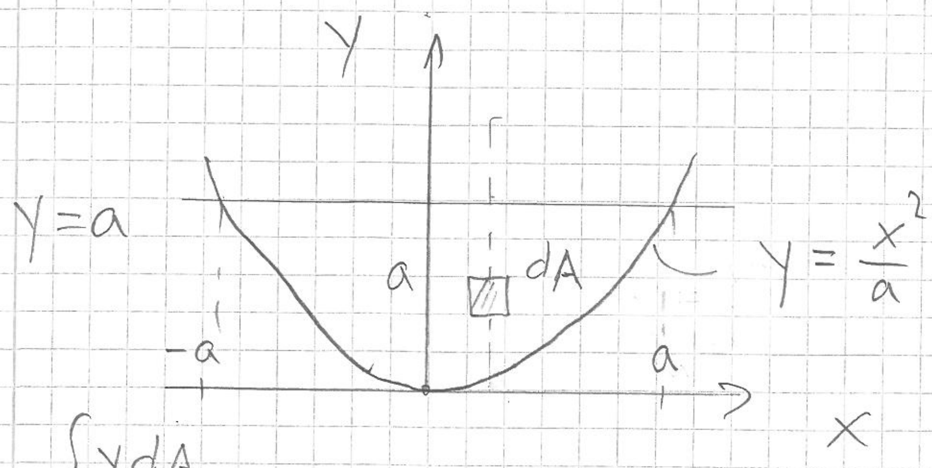
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)



$$Y_c = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} \qquad dA = dx\,dy$$

$$\int_A y\,dA = \int_A y\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left[\int_{\frac{x^2}{a}}^{a} y\,dy\right]dx$$

$$= \int_{-a}^{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x^2}{a}}^{a} dx = \int_{-a}^{a}\frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{x^4}{a^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2x - \frac{1}{a^2}\frac{x^5}{5}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{5}a^3 - \left(-a^3 + \frac{1}{5}a^3\right)\right)$$

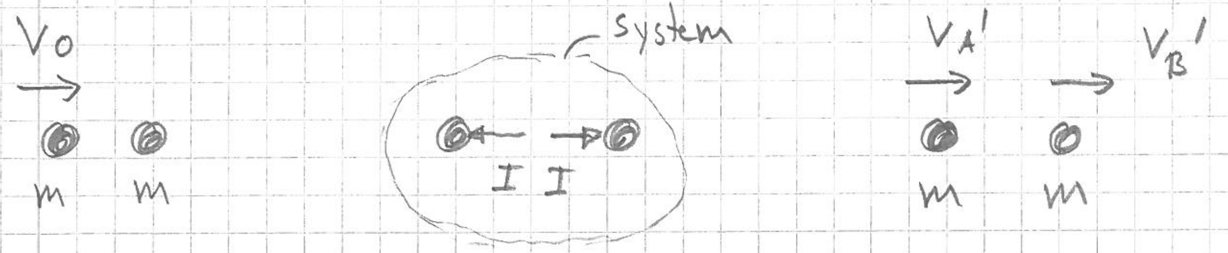
$$= \frac{4}{5}a^3 \quad //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left[\int_{\frac{x^2}{a}}^{a} dy\right]dx = \int_{-a}^{a}\left[Y\right]_{\frac{x^2}{a}}^{a} dx$$

$$= \int_{-a}^{a}\left(a - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{4}{3}a^2 \quad //$$

$$Y_c = \frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2} = \frac{3}{5}a \quad \text{V, S, V} \quad //$$

2) Före Under Efter



$\bar{I}_s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ för systemet ger

$$\longrightarrow \quad 0 = mV_A' + mV_B' - mV_0 \qquad (1)$$

$$e = \frac{V_B' - V_A'}{V_A - V_B} = \frac{V_B' - V_A'}{V_0 - 0} \qquad (2)$$

(1), (2) ger $\begin{cases} V_A' + V_B' = V_0 \\ V_B' - V_A' = eV_0 \end{cases}$

ger $\begin{cases} V_A' = \frac{1}{2} V_0 (1-e) \\ V_B' = \frac{1}{2} V_0 (1+e) \end{cases}$

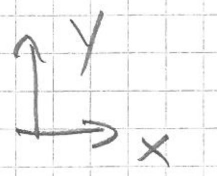
$$E = \left| \frac{1}{2} m V_A'^2 + \frac{1}{2} m V_B'^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 \right| =$$

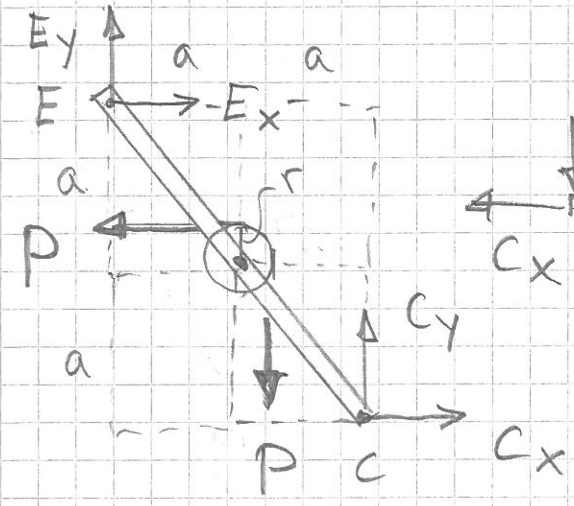
$$= \left| \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{4} V_0^2 (1-e)^2 + \frac{1}{4} V_0^2 (1+e)^2 - V_0^2 \right) \right|$$

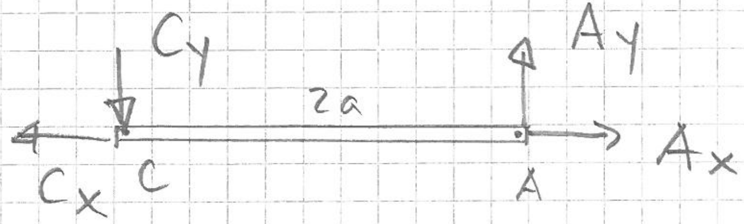
$$= \left| \frac{1}{4} m V_0^2 (e^2 - 1) \right| = \frac{1}{4} m V_0^2 (1 - e^2) \quad //$$

V.S.V.

3) Frilägg delarna







$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ ger

<u>Delen EC:</u>

$\rightarrow \quad E_x - P + C_x = 0 \qquad (1)$

$\uparrow \quad E_y - P + C_y = 0 \qquad (2)$

$(E) \quad C_y \cdot 2a + C_x \cdot 2a - P(a-r)$

$\quad - P(a+r) = 0 \qquad (3)$

<u>Delen CA:</u>

$\rightarrow \quad A_x - C_x = 0 \qquad (4)$

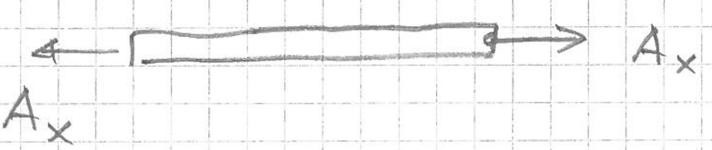
$\uparrow \quad A_y - C_y = 0 \qquad (5)$

$(A) \quad C_y \cdot 2a = 0 \qquad (6)$

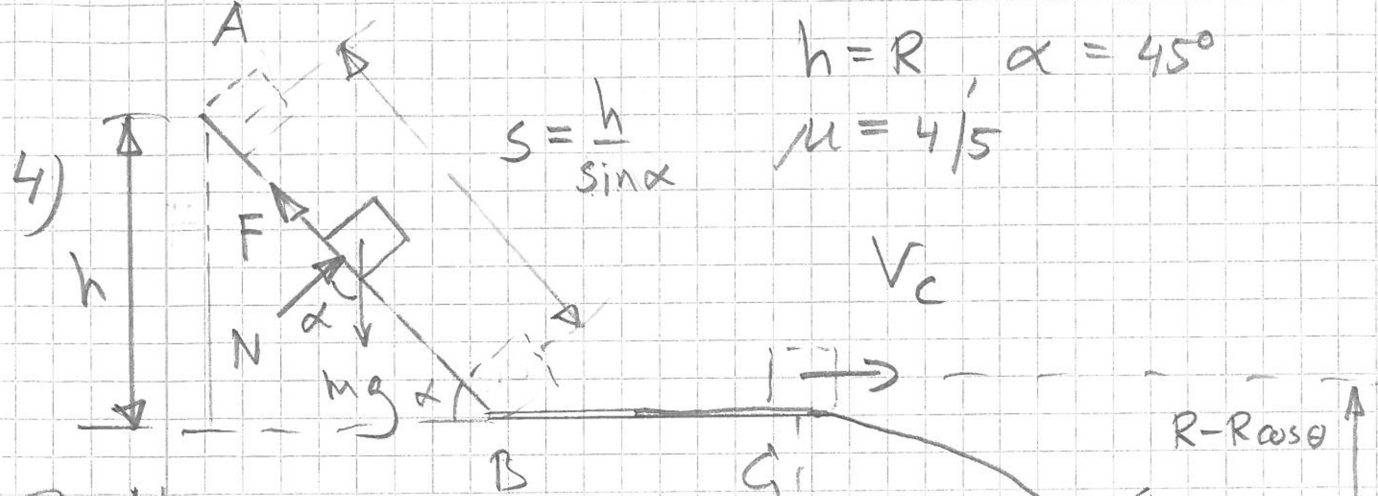
(1) $\cdots$ (6) ger $G_x = P$, $G_y = 0$ och

$$\begin{cases} A_x = P \\ A_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = P \end{cases}$$

<u>Alt.</u> CA är en "two-force member"



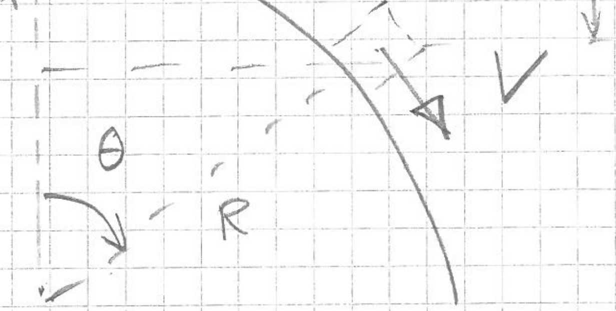
4)



$h = R$, $\alpha = 45°$

$\mu = 4/5$

$s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$



$N - mg\cos\alpha = 0$

Beräkna V_c mha

$U = \Delta T + \Delta V_g + \underbrace{\Delta V_e}_{=0}$

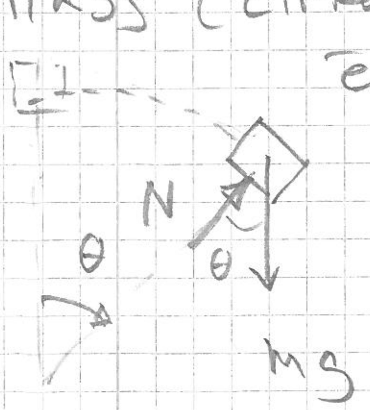
$U = \int_A^B \bar{F} \circ d\bar{r} = -F \cdot s = -\mu N s =$

$= -\mu mg\cos\alpha \cdot \dfrac{h}{\sin\alpha} = -\dfrac{4}{5} mg \cdot R$ g-v

$-\dfrac{4}{5} mgR = \dfrac{1}{2} m V_c^2 - mgR$ ger

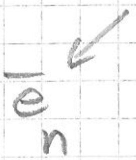
$V_c^2 = \dfrac{2}{5} gR$ (1)

Frilägg (cirkelbana), Kinematik



$a_n = \dfrac{V^2}{R}$, $a_t = R\ddot{\theta}$

$\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$ g-v



$mg\cos\theta - N = m\dfrac{V^2}{R}$

ger $N = mg\cos\theta - m\dfrac{v^2}{R}$ (2)

Bestäm $v(\theta)$ mha

$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_g''^{\,0}$ utgå från C

$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_c^2 - mg(R - R\cos\theta)$

ger via (1) $v^2(\theta) = \frac{12}{5}gR - 2gR\cos\theta$

ins. i (2) ger

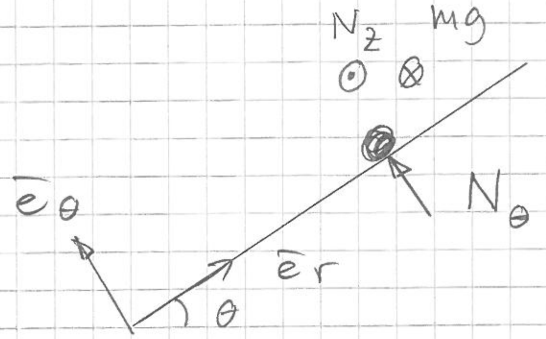
$$N(\theta) = 3mg\cos\theta - \frac{12}{5}mg \quad //$$

$N = 0$ ger $\cos\theta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

dvs $\theta^* = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ //

$\dot{\theta} = \omega = \text{konst.}, \quad \ddot{\theta} = 0$

5) Frilägg



Kinematik $(r-\theta)$

$$\bar{V} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta = \dot{r}\bar{e}_r + r\omega\bar{e}_\theta$$

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{e}_\theta = (\ddot{r} - r\omega^2)\bar{e}_r + 2\dot{r}\omega\bar{e}_\theta$$

$\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_r$: $\nearrow$ $0 = m(\ddot{r} - r\omega^2)$ (1)

$\bar{e}_\theta$: $\nwarrow$ $N_\theta = m2\dot{r}\omega$ (2)

$\bar{e}_z$: $\odot$ $N_z - mg = m \cdot 0$

Bestäm $r(t)$ ur (1) $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$

Kar. ekv. $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ ger $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = -\omega$

ger $r(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$, $\dot{r}(t) = C_1\omega e^{\omega t} - C_2\omega e^{-\omega t}$

B.V. $t = 0$ $\begin{cases} r = r_0 \text{ ger } r_0 = C_1 + C_2 \\ \dot{r} = 0 \text{ ger } 0 = C_1\omega - C_2\omega \end{cases}$

dvs $C_1 = C_2 = \frac{r_0}{2}$, således:

$r(t) = \frac{r_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$; $\dot{r}(t) = \frac{r_0}{2}\omega\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$

(2) ger $N_\theta(t) = mr_0\omega^2\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$ //

$$|\bar{V}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\omega)^2} \qquad (*)$$

Bestäm $\dot{r}(r)$ via (1) $\ddot{r} = r\omega^2$

men $\ddot{r}\,dr = \dot{r}\,d\dot{r}$ $\left(\text{ty } \ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r}\right)$

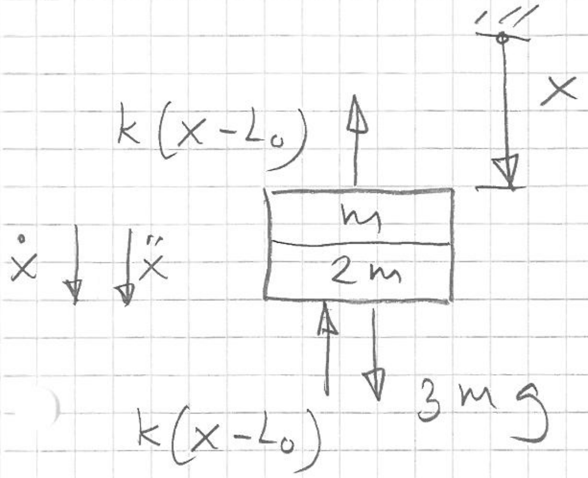
dvs $\int r\omega^2\,dr = \int \dot{r}\,d\dot{r}$ ger $\omega^2 \frac{r^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + C_1$

B.V. då $r = r_0$, $\dot{r} = 0$ ger $C_1 = \frac{\omega^2 r_0^2}{2}$

dvs $\dot{r}^2 = \omega^2(r^2 - r_0^2)$ ins i $(*)$ ger

$$|\bar{V}(r)| = \omega\sqrt{2r^2 - r_0^2} \qquad //$$

6) Frilägg $3m$ och finn $x(t)$ först



$\Sigma F = ma$ ger

$$\downarrow \quad 3mg - 2k(x-L_0) = 3m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = g + \frac{2k}{3m}L_0 \quad (1)$$

Ident. (1) med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$,

ger $0 = 2\zeta\omega_n$, $\frac{2k}{3m} = \omega_n^2$, $g + \frac{2k}{3m}L_0 = \omega_n^2 x_1$,

dvs $\zeta = 0$, $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$, $x_1 = \frac{3mg}{2k} + L_0$

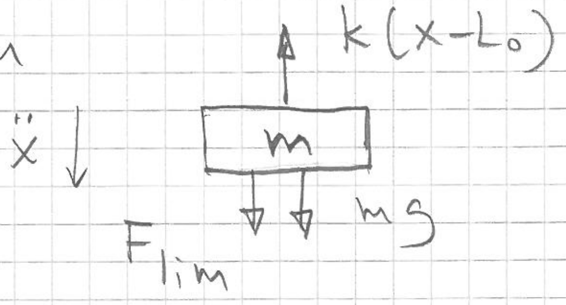
Således: $x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{3mg}{2k} + L_0$

B.V. då $t=0$ $x = L_0$, $\dot{x} = 0$ ger

$A = -\frac{3mg}{2k}$, $B = 0$

$$x(t) = -\frac{3mg}{2k}\cos\omega_n t + \frac{3mg}{2k} + L_0 \quad (2)$$

Frilägg m



$\Sigma F = ma$ ger $\downarrow \quad F_{lim} + mg - k(x-L_0) = m\ddot{x}$

$(*)$

$$(2) \text{ ger } \quad \ddot{x} = \frac{3mg}{2k}\omega_n^2 \cos\omega_n t = g\cos\omega_n t$$

$$\text{och} \quad k(x - l_0) = k\left(\frac{3mg}{2k} - \frac{3mg}{2k}\cos\omega_n t\right)$$

$$(*) \text{ ger } \quad F_{lim}(t) = \frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}mg\cos\omega_n t$$

$$\text{där } \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

<u>Svar:</u>

$$F_{lim}(t) = \frac{1}{2}mg\left(1 - \cos\omega_n t\right)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$