Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2013-08-27, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TERE, TER1

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00 och 17.30)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2013-08-27

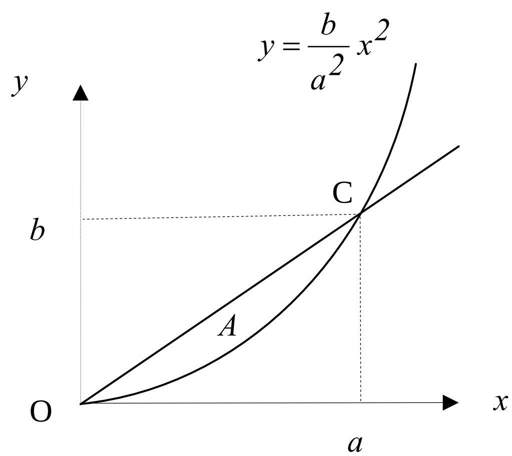
Teoridel:

1)

Centroiden för en yta definieras som bekant som $\boldsymbol{r}_C = \dfrac{\int_A \boldsymbol{r}\, dA}{\int_A dA}$.

Visa att centroidens läge i y-led ges av $y_C = \dfrac{6}{15} b$ för arean A nedan som begränsas av kurvan $y = (b / a^2)\, x^2$ samt den räta linjen OC enligt figur, där O är origo och skärningspunkten C har koordinaterna $x = a$, $y = b$.

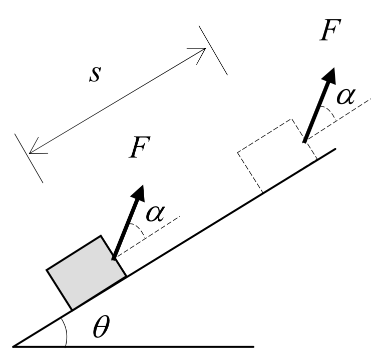
(2p)



2a)
En partikel förflyttas av en konstant kraft F en sträcka s uppför ett lutande plan med lutningsvinkeln θ enligt figur. Kraften bildar hela tiden vinkeln α mot planet.

Utgå från definitionen av arbete, dvs $U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \circ d\,\boldsymbol{r}$ och visa att arbetet som kraften F uträttar på partikeln under förflyttningen är $U = F\, s\, cos\alpha$.

(1p)



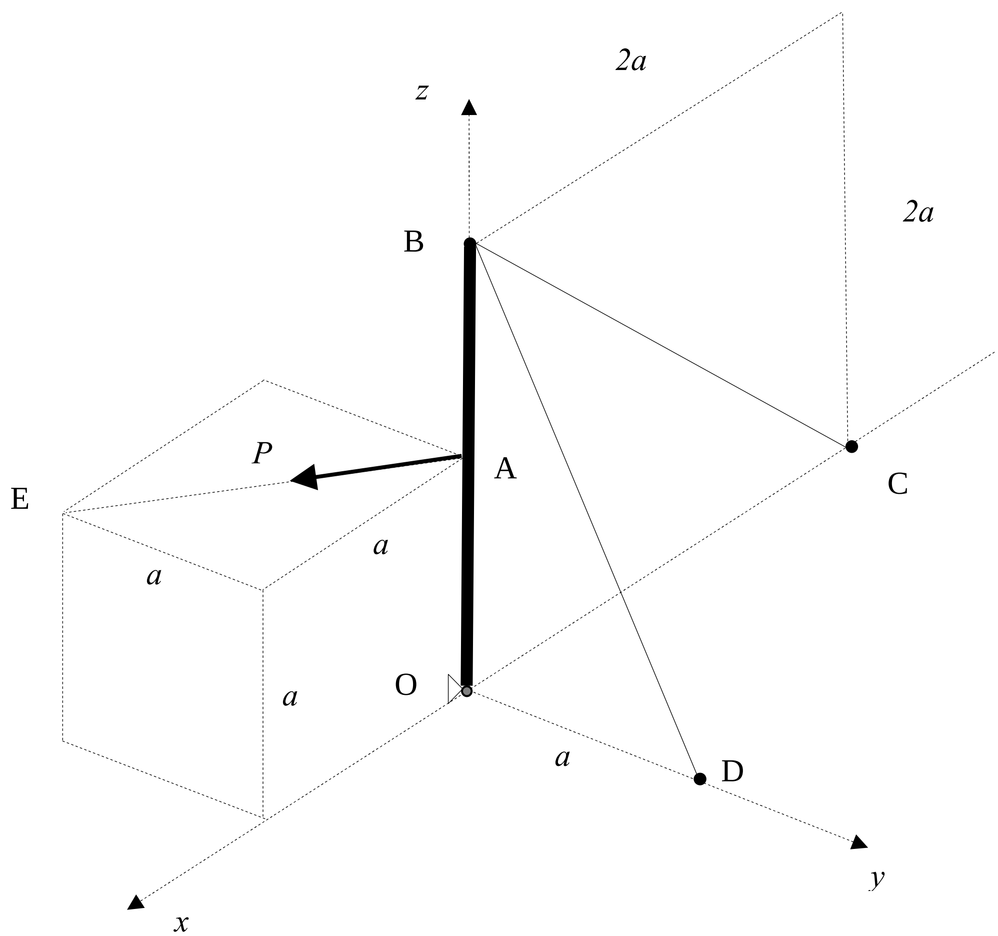
2b)
Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ och definitionen av rörelsemängd $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$ och härled impulslagen för en partikel, dvs

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F}\, dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1 \qquad \text{(1p)}$$

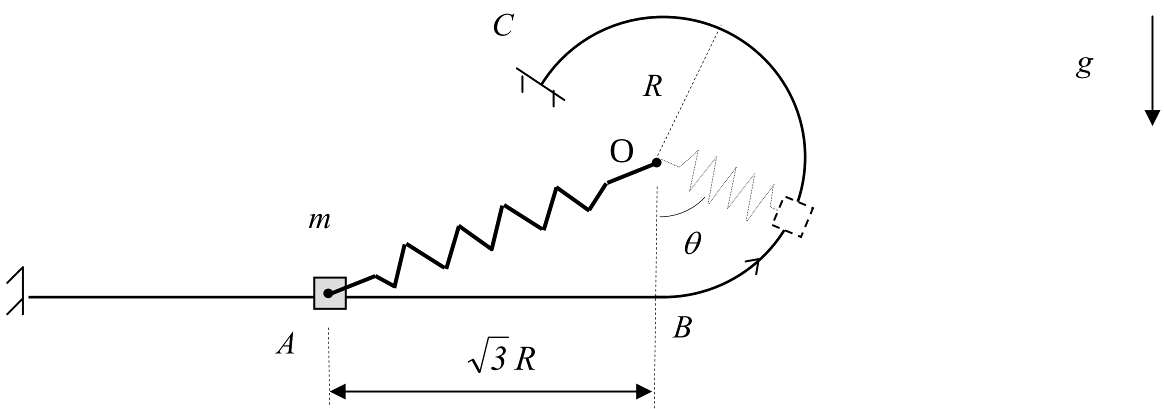
Problemdel:

3)
En stång OB med längden 2*a* befinner sig i jämvikt när den är orienterad längs z-axeln enligt figur. Stången är lagrad vid O med en friktionsfri kulled och vid änden B är två snören BC och BD fästa och dessa är sedan fixerade vid C och D som är punkter på respektive *x*- och *y*-axeln. Stången belastas med en given last *P* vid mittpunkten A i rät vinkel mot stången i riktningen AE, se figur. Beräkna storleken av dragkraften i snörena BC och BD. Geometri enligt figuren och kroppens massa kan försummas.

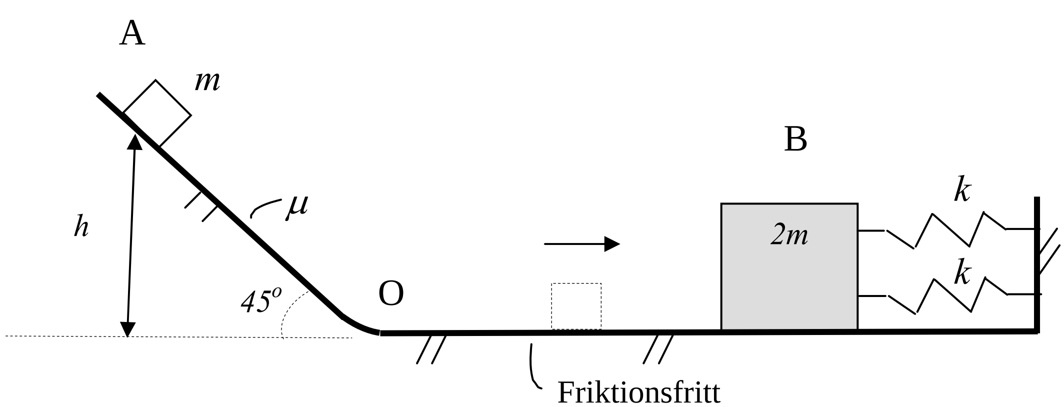
(2p)



4)
En liten hylsa med massan *m* kan röra sig från *A* till *C* längs en stång enligt figur. Hylsan släpps utan hastighet vid läge *A* och rör sig först horisontellt och vid *B* följer den en cirkulär bana med radien *R* enligt figur. Beräkna normalkraften på hylsan från stången som funktion av vinkeln θ under den cirkulära delen av banan. Studera intervallet $0 \leq \theta \leq \pi$. Ingen friktion och all rörelse sker i ett och samma vertikalplan. Fjäderkonstanten är $k=8mg/R$ och fjäderns ospända längd är $L_0=R/2$. (3p)



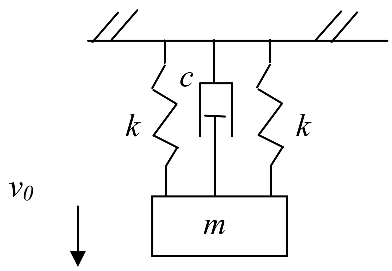
5)
Ett block B med massan *2m* befinner sig i vila och är fäst i två ospända fjädrar med fjäder-konstanten *k* vardera enligt figuren. Ett annat block A med massan *m* släpps från vila från en höjd *h* och glider med friktion längs ett lutande plan ned till punkten O där en mjuk övergång sker till ett horisontellt friktionsfritt underlag. Block A stöter sedan an mot block B och fastnar på block B i en fullständig plastisk stöt ($e=0$). Bestäm fjädrarnas maximala deformation för den efterföljande rörelsen. Planets lutning är 45 grader och den kinetiska friktionskoefficienten är μ mellan A och O. Försumma dimensionerna för blocken. (3p)



6)
Ett fjäder-dämpsystem består av två lika fjädrar med fjäderkonstanten k vardera samt en dämpare med dämpkonstanten $c = 2\sqrt{2km}$ upphängda i ett tak. Fjädrarnas ospända längd är L_0. Systemet startas genom att massan m ges en fart v_0 nedåt i figuren då fjädrarna har längden $L_0 + mg/2k$.

a) Beräkna fjädrarnas längd som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen, låt $t = 0$ vid starten. (2p)

b) Beräkna tidpunkten då fjädrarnas längd är maximal. (1p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$. Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

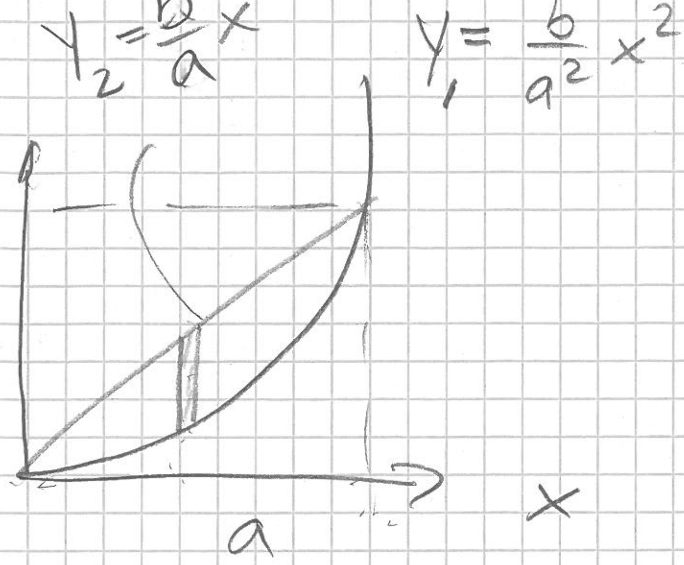
$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1]om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1) 

$$\begin{cases} dA = (Y_2 - Y_1)\,dx = \left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a^2}x^2\right)dx \\ Y_c^{el} = Y_1 + \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1) = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_1) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x + \frac{b}{a^2}x^2\right)$$

$$\int_A Y_c^{el}\,dA = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x + \frac{b}{a^2}x^2\right)\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a^2}x^2\right)dx$$

$$= \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2}{a^4}x^4\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3} - \frac{b^2}{a^4}\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3} - \frac{b^2}{a^4}\frac{a^5}{5}\right)$$

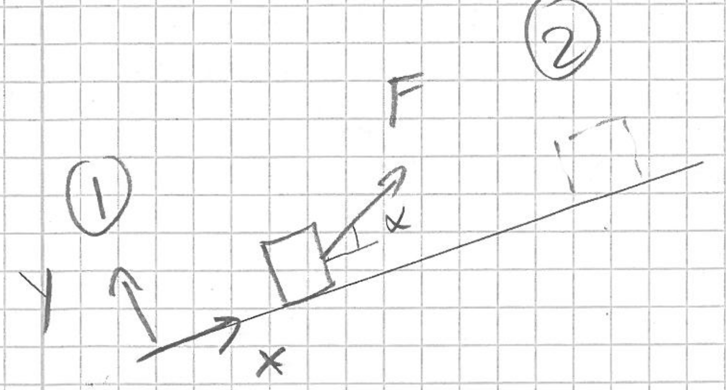
$$= \frac{1}{2}b^2a\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{15}ab^2 \;//$$

$$\int_A dA = \int_0^a \left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \left[\frac{b}{a}\frac{x^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3} = ab\frac{1}{6}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{15}ab^2}{ab\frac{1}{6}} = \underline{\underline{\frac{6}{15}b}} \quad \text{V.S.V}$$

2a)



$$\bar{F} = F\cos\alpha\,\bar{e}_x + F\sin\alpha\,\bar{e}_y$$

$$\bar{r} = x\,\bar{e}_x$$

$$d\bar{r} = dx\,\bar{e}_x$$

$$U = \int_{①}^{②} \bar{F} \circ d\bar{r} = \int_0^s F\cos\alpha\, dx = \big/ F, \alpha \text{ konst} \big/$$

$$= F\cos\alpha \int_0^s dx = F\cos\alpha \cdot s \; //$$

V.S.V.

2b)

$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

mult. med dt och integrera

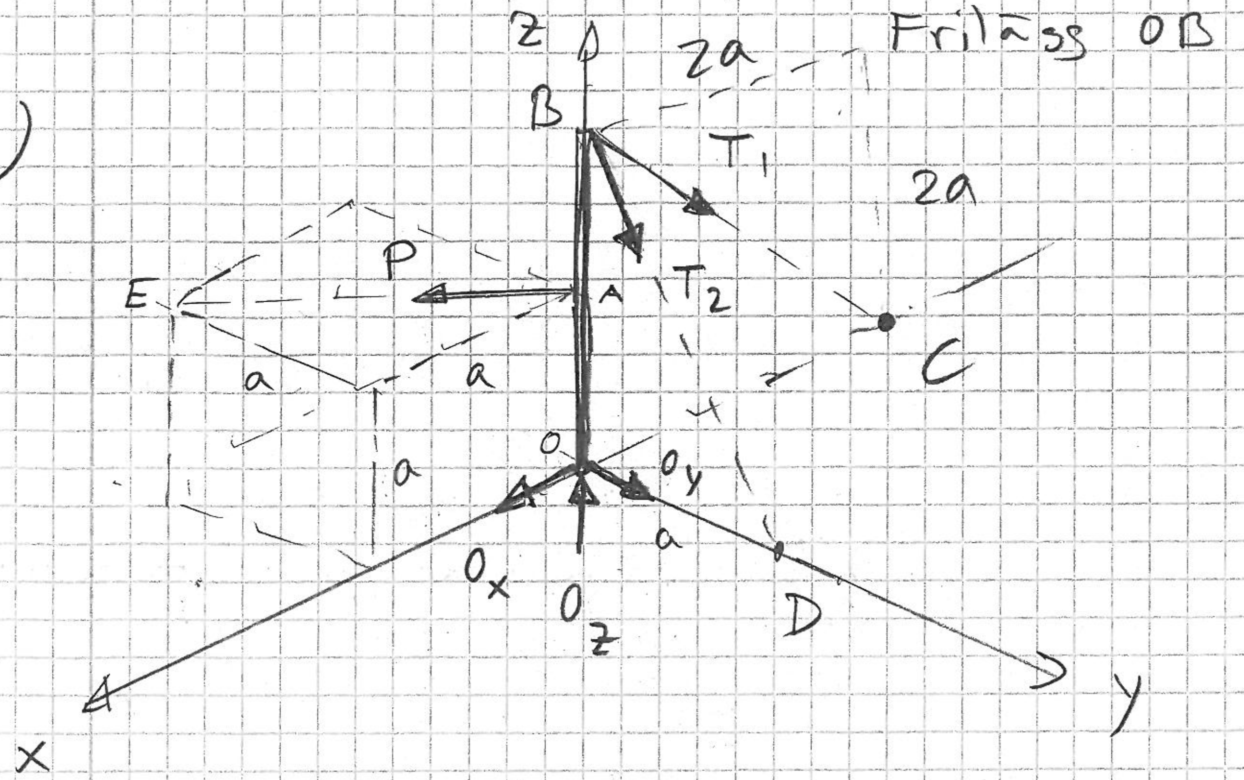
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\bar{v})\, dt = \Big[m\bar{v}\Big]_{t_1}^{t_2}$$

$$= m\bar{v}(t_2) - m\bar{v}(t_1) = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1$$

men $\bar{G} = m\bar{v}$ ger

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\, dt = \bar{G}_2 - \bar{G}_1 \; // \quad \text{V.S.V.}$$

3)



$$\overline{T}_1 = T_1\,\overline{e}_{BC} = T_1\,\frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \frac{T_1}{\sqrt{8}\,a}\left(-2a\overline{e}_x - 2a\overline{e}_z\right)$$

$$= \frac{T_1}{\sqrt{2}}\left(-\overline{e}_x - \overline{e}_z\right)$$

$$\overline{T}_2 = T_2\,\overline{e}_{BD} = T_2\,\frac{\overline{BD}}{|\overline{BD}|} = \frac{T_2}{\sqrt{5}\cdot a}\left(a\overline{e}_y - 2a\overline{e}_z\right)$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{5}}\left(\overline{e}_y - 2\overline{e}_z\right)$$

$$\overline{P} = P\cdot\overline{e}_{AE} = P\cdot\frac{\overline{AE}}{|\overline{AE}|} = \frac{P}{\sqrt{2}}\left(\overline{e}_x - \overline{e}_y\right)$$

$$\overline{F}_0 = O_x\,\overline{e}_x + O_y\,\overline{e}_y + O_z\,\overline{e}_z$$

$$\overline{M}^{O} = \overline{0} \quad \text{g-v}$$

$$\overline{OA} \times \overline{P} + \overline{OB} \times \overline{T}_1 + \overline{OB} \times \overline{T}_2 = \overline{0} \qquad (1)$$

där $\overline{OA} = a\,\overline{e}_z$, $\overline{OB} = 2a\,\overline{e}_z$

(1) g-v

$$\begin{vmatrix} \overline{e}_x & \overline{e}_y & \overline{e}_z \\ 0 & 0 & a \\ P\frac{1}{\sqrt{2}} & -P\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{e}_x & \overline{e}_y & \overline{e}_z \\ 0 & 0 & 2a \\ -T_1\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -T_1\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \overline{e}_x & \overline{e}_y & \overline{e}_z \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & T_2\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2T_2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \overline{0}$$

$$\left(P\frac{1}{\sqrt{2}}a - T_2\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2a\right)\overline{e}_x + \left(P\frac{1}{\sqrt{2}}a - T_1\frac{1}{\sqrt{2}}2a\right)\overline{e}_y$$

$$+\ 0\cdot\overline{e}_z = \overline{0} \quad \text{g-v}$$

x: led $\quad P\frac{1}{\sqrt{2}}a - T_2\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2a = 0 \qquad (1)$

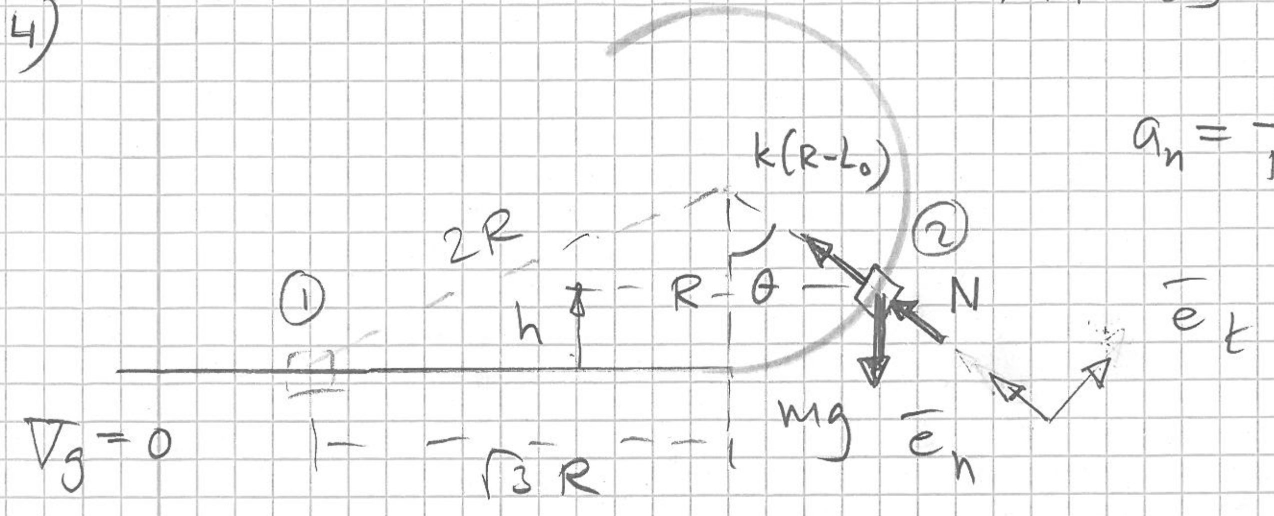
y: led $\quad P\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}a - T_1\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2a = 0 \qquad (2)$

z: led $\quad 0 = 0$

(1), (2) g-v $\quad T_1 = \frac{1}{2}P$, $\quad T_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}P \quad //$

4)

Frilägg



$a_n = \frac{v^2}{R}$

$V_g = 0$

$\Sigma \bar{F} = m a$ ger $\bar{e}_n$: $N + k(R - L_0) - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$ (1)

(1) ger med $k = 8mg/R$, $L_0 = \frac{R}{2}$

$$N(\theta) = mg\cos\theta - 4mg + m\frac{v^2}{R} \quad (2)$$

Bestäm $v(\theta)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

där $h = R - R\cos\theta$, $x_1 = 2R - L_0 = \frac{3}{2}R$

$x_2 = R - L_0 = \frac{1}{2}R$

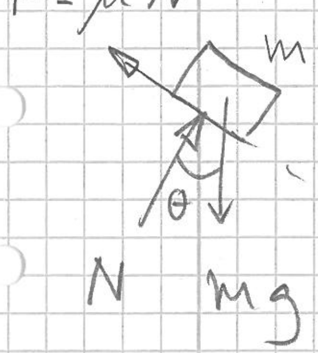
ger $v^2(\theta) = 2gR\cos\theta + 14gR$

ins. i (2) ger sedan

$$N(\theta) = mg(10 + 3\cos\theta)$$

5) Beräkna A:s hastighet före stöten mha

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \cancel{\Delta V_e}^{\,0} \quad (1)$$



$$U = \int_A^O \bar{F} \circ d\bar{r} = \int_0^{\frac{h}{\sin\theta}} -\mu N \, ds$$

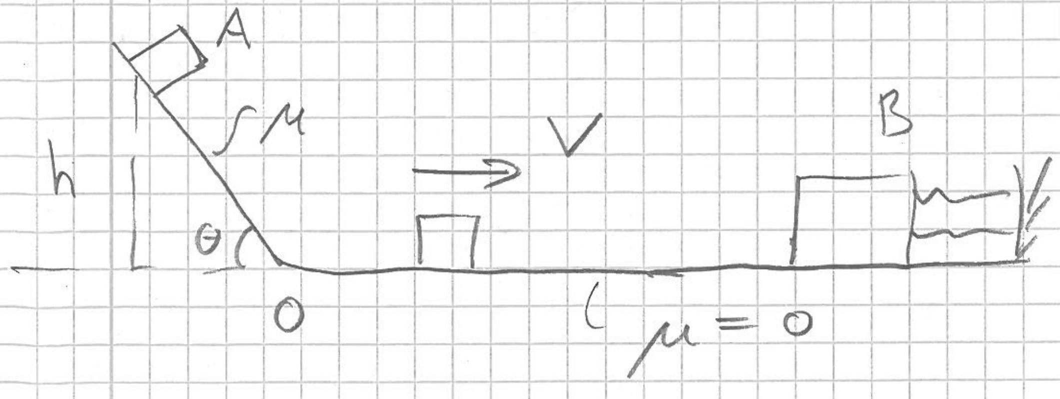
$\nearrow$ $N - mg\cos\theta = 0$ ger $N = mg\cos\theta$

dvs $$U = \int_0^{\frac{h}{\sin\theta}} -\mu mg\cos\theta \, ds = -\mu mg\cos\theta \frac{h}{\sin\theta}$$

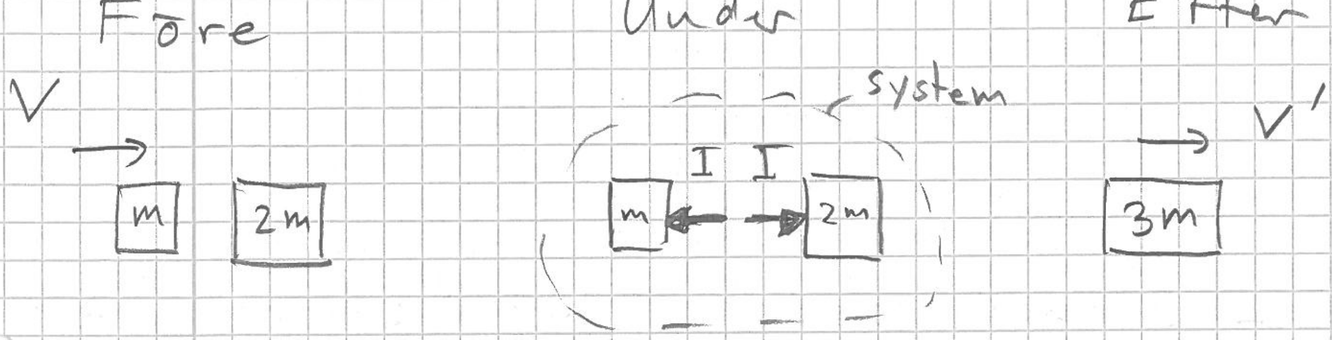
$/\theta = 45°/$ $U = -\mu mgh$

(1) ger $-\mu mgh = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$

dvs $v = \sqrt{2gh(1-\mu)}$



Stöten



$\bar{I}^s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$, ger för systemet

$$\rightarrow \quad 0 = 3mv' - mv$$

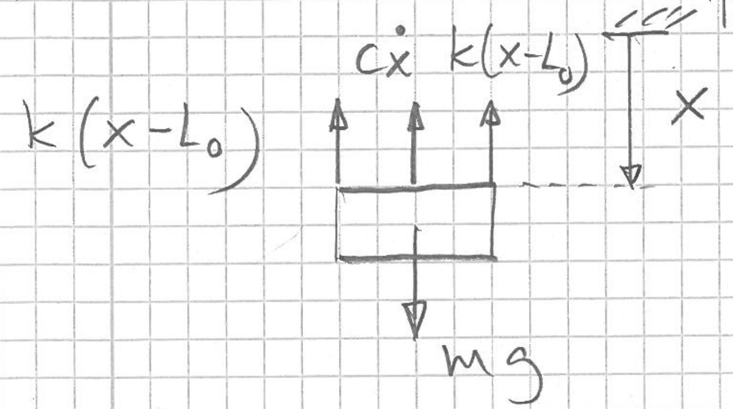
dvs $\quad v' = \frac{v}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{2gh(1-\mu)} \quad (1)$

Max deformation fås då 3m vänder. $\quad U = \Delta T + \overset{0}{\Delta V_g} + \Delta V_e \quad$ ger

$$0 = 0 - \frac{1}{2} 3m v'^2 + \frac{1}{2} 2k\delta^2$$

ger via (1) $\quad \delta = \sqrt{gh(1-\mu)\cdot\frac{m}{3k}}$

6) Frilägg m



(x = Fjäderlängd)

$\dot{x}$ $\ddot{x}$

$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} \quad \downarrow \quad mg - 2k(x-L_0) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = g + \frac{2k}{m}L_0$$

Ident. med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

dvs $\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$; $\frac{2k}{m} = \omega_n^2$;

$$g + \frac{2k}{m}L_0 = \omega_n^2 x_1$$

ger med $c = 2\sqrt{2km}$, $\zeta = 1$, $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$$x_1 = \frac{mg}{2k} + L_0 \text{, dvs}$$

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{2k} + L_0$$

B.V. $t=0 \quad x = L_0 + \frac{mg}{2k} \quad , \quad \dot{x} = V_0$

ger $A = 0 \quad , \quad B = V_0$

dvs $x(t) = V_0 \cdot t e^{-w_n t} + \frac{mg}{2k} + L_0$ //

$\dot{x} = 0$ då $x = x_{max}$ (vändläget)

$\dot{x} = V_0 e^{-w_n t}(1 - w_n t) = 0$

ger $t = \frac{1}{w_n}$

Således: a) $x(t) = V_0 t e^{-w_n t} + \frac{mg}{2k} + L_0$

b) $t = \frac{1}{w_n}$

där $w_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$