Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2013-01-12, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: ___________________

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00 och 17.30)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivningstillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 6

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2013-01-12

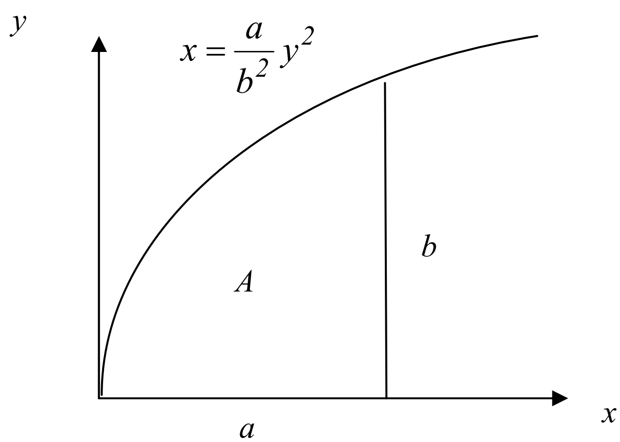
Teoridel:

1)

Centroiden för en yta definieras som bekant som punkten $\boldsymbol{r}_C = \dfrac{\int_A \boldsymbol{r}\, d\, A}{\int_A d\, A}$.

Utgå från definitionen ovan och visa att centroidens läge i x-led för arean A som begränsas av x-axeln samt kurvan $x = \dfrac{a}{b^2} y^2$ och linjen $x = a$ i figuren ges av: $x_c = \dfrac{3a}{5}$

(1p)



2)

Den kinetiska energin som en partikel har ges som bekant av $T = \dfrac{1}{2} m v^2$.

Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, och visa att

$$U = T_2 - T_1$$

där U är uträttat arbete längs en bankurva från läge $\boldsymbol{r}_1$ till $\boldsymbol{r}_2$, dvs

$$U = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \sum \boldsymbol{F} \circ d\,\boldsymbol{r}$$

(2p)

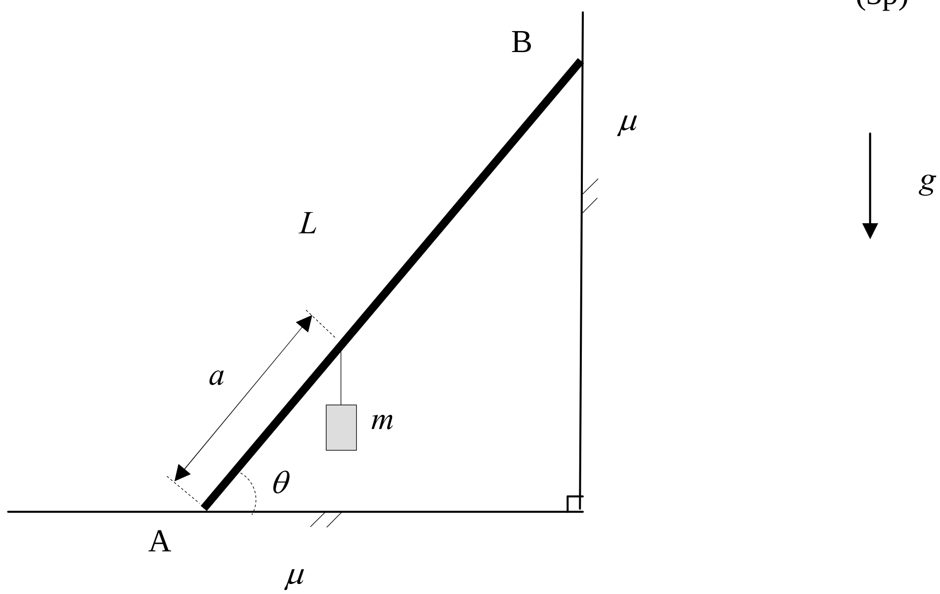
Ledning: $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} \circ \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{v})$ där $\boldsymbol{v}$ är partikelns hastighetsvektor.

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2013-01-12

Problemdel:

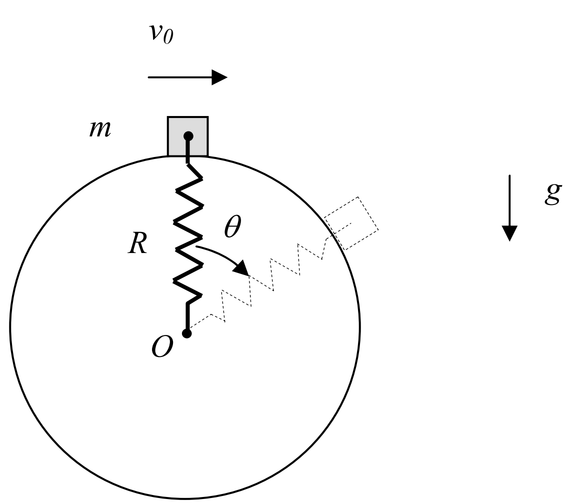
3)
En stege AB med försumbar massa och med längden L står lutad mot en vertikal vägg enligt figur. På avståndet a från kontaktpunkten A hänger man upp en vikt med massan m. Hur stort kan a maximalt vara om stegen skall förbli i vila? Den statiska friktionskoefficienten vid båda kontaktpunkterna A och B är μ och vidare gäller att $tan\,\theta = 4/3$.

(3p)



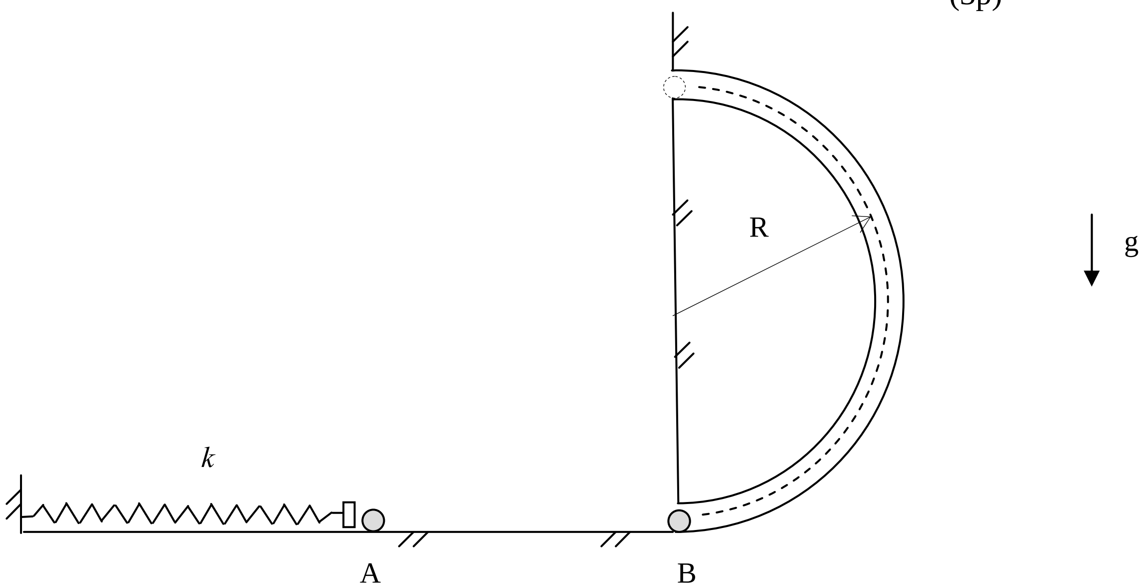
4)
En partikel med massan m kan friktionsfritt röra sig på en fix cirkulär cylinder med radien R. En fjäder med fjäderkonstanten $k=14mg/R$ och ospända längden $L_0=R/2$ är fäst i partikeln och i cirkelns medelpunkt O. Partikeln startas med hastigheten $v_0 = \sqrt{gR}$ vinkelrät mot fjädern vid högsta punkten då vinkeln $\theta = 0$ enligt figur. Beräkna normalkraften från cylindern på partikeln som funktion av vinkeln θ. Rörelsen sker i ett och samma vertikalplan.

(3p)



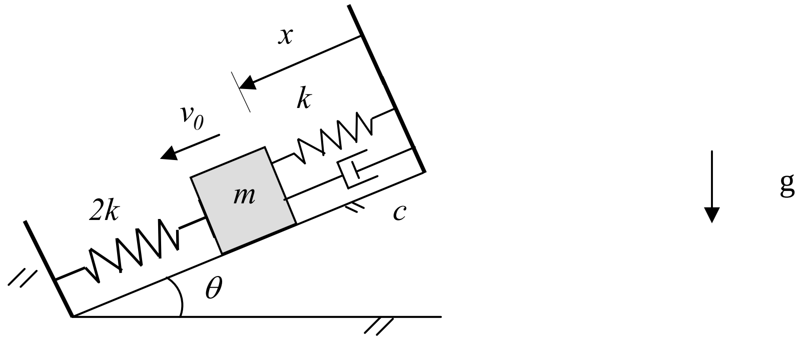
5)
En partikel A med massan m är intryckt i en fjäder med fjäderkonstanten k och fjäderns deformation (ihoptryckning) i detta läge är δ. Partikeln A släpps från vila i detta intryckta läge och kolliderar senare med en stillastående partikel B som även den har massan m, se figur. Efter kollisionen (stöten) åker partiklarna i ett cirkulärt spår vars radie är R. Man observerar att partikel B efter kollisionen precis når upp till den högsta punkten på cirkeln. Beräkna stöttalet e mellan partiklarna A och B vid kollisionen om $k = 9mg/R$ och $\delta = R$. Energiförlusten vid kollisionen antas vara den enda energiförlusten i systemet.

(3p)



6)
En massa m är placerad på ett lutande plan med lutningsvinkeln θ och kopplad till två fjädrar och en dämpare enligt figuren. Fjäderkonstanterna är k respektive $2k$ och dämpkonstanten c är vald sådan att $c = 2\sqrt{3km}$. Massan ges en begynnelsehastighet v_0 vid tiden $t = 0$ då fjädrarna är ospända. Speciellt gäller att $v_0 = 2g\sqrt{m/3k}$ och fjädrarnas ospända längd är L_0 vardera och vinkeln $\theta = 30^o$. Beräkna läget x som funktion av tiden t för den efterföljande rörelsen. Försumma friktionen mot planet.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$. Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)
$$x_c = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} \qquad dxdy - \text{element}$$

$$\int_A x\,dA = \int_A x\,dxdy = \int_0^b \left[\int_{\frac{a}{b^2}y^2}^{a} x\,dx \right] dy$$

$$= \int_0^b \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{a}{b^2}y^2}^{a} dy = \int_0^b \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{a^2}{b^4}y^4\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2 y - \frac{a^2}{b^4}\frac{y^5}{5} \right]_0^b = \frac{4}{10}a^2 b$$

$$\int_A dA = \int_A dxdy = \int_0^b \left[\int_{\frac{a}{b^2}y^2}^{a} dx \right] dy$$

$$= \int_0^b \left[x \right]_{\frac{a}{b^2}y^2}^{a} dy = \int_0^b \left(a - \frac{a}{b^2}y^2\right) dy$$

$$= \left[ay - \frac{a}{b^2}\frac{y^3}{3} \right]_0^b = ab - \frac{1}{3}ab = \frac{2}{3}ab$$

$$x_c = \frac{\frac{4}{10}a^2 b}{\frac{2}{3}ab} = \frac{12}{20}a = \frac{3}{5}a \quad //$$

2) $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ mult. med $d\bar{r}$ skalärt

$$\underbrace{\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \Sigma \bar{F} \circ d\bar{r}}_{U} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} m\bar{a} \circ d\bar{r}$$

$$U = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} m\bar{a} \circ d\bar{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\bar{v}}{dt} \circ \frac{d\bar{r}}{dt}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\bar{v}}{dt} \circ \bar{v}\,dt = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\bar{v} \circ \bar{v})\,dt =$$

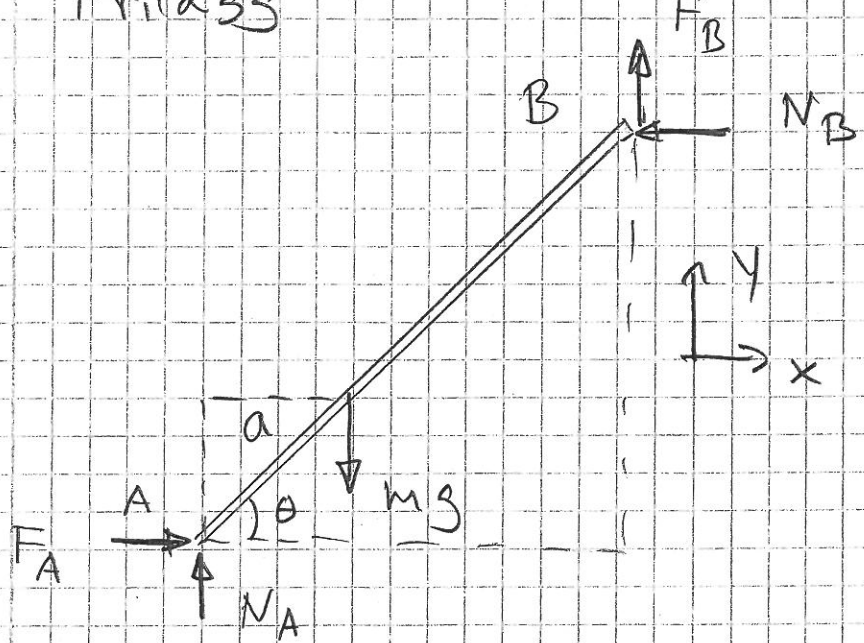
$$= \frac{m}{2}\left[|\bar{v}|^2\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2}\left[v^2\right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{m}{2}\left(v^2(t_2) - v^2(t_1)\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

dvs $U = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ eller

$U = T_2 - T_1$ v.s.v

3) Frilägg



$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ ger

$\rightarrow$ $F_A - N_B = 0$ (1)

$\uparrow$ $N_A - mg + F_B = 0$ (2)

A) $-mg\, a \cdot \cos\theta + F_B L \cos\theta + N_B L \sin\theta = 0$ (3)

Villkor: $|F_A| \le \mu N_A$; $N_A \geq 0$

$|F_B| \le \mu N_B$; $N_B \geq 0$

Vid kollaps är friktionen fullt utbildad vid både A och B, dvs

$F_A = \mu N_A$ (4)

$F_B = \mu N_B$ (5)

(4), (5) i (1), (2), (3) ger vid gränsfallet

$$a = \frac{\mu\left(\mu + \frac{4}{3}\right)L}{1+\mu^2}$$

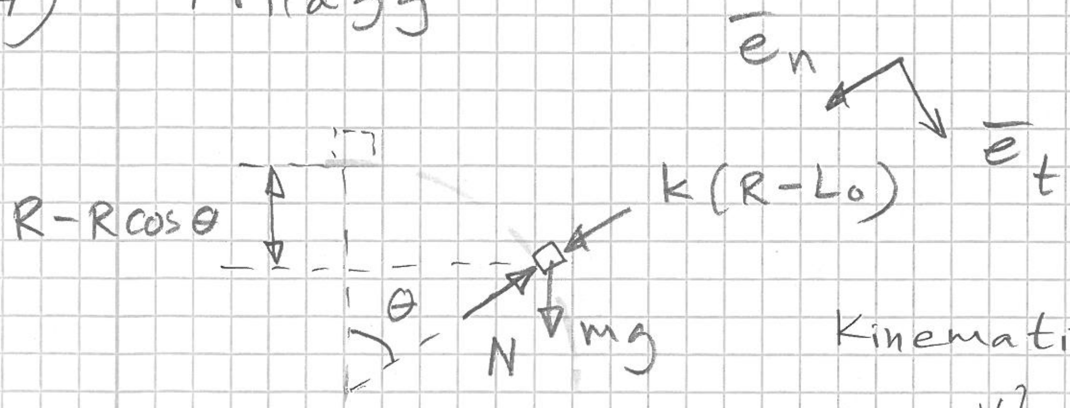
och

$$\begin{cases} F_A = \dfrac{\mu m g}{1+\mu^2} > 0 & \text{(ok)} \\ N_A = \dfrac{m g}{1+\mu^2} > 0 & \text{(ok)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_B = \mu^2 \dfrac{m g}{1+\mu^2} > 0 & \text{(ok)} \\ N_B = \mu \dfrac{m g}{1+\mu^2} > 0 & \text{(ok)} \end{cases}$$

Svar $a = \dfrac{\mu\left(\mu + \frac{4}{3}\right)L}{1+\mu^2}$

4) Frilägg



Kinematik (n-t)

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$; $a_t = \ddot{s} = R\ddot{\theta}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_n \swarrow \quad -N + mg\cos\theta + k(R-L_0) = m\,a_n$

med $k = 14mg/R$ och $L_0 = \dfrac{R}{2}$ fås

$$N = mg\cos\theta + \frac{14mg}{R}\left(R - \frac{R}{2}\right) - m\frac{v^2}{R}$$

$$N = mg\cos\theta + 7mg - m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

Bestäm $v(\theta)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

ger $\quad 0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(R - R\cos\theta)$

med $v_0 = \sqrt{gR}$ fås

$$v^2(\theta) = 3gR - 2gR\cos\theta$$

ins i (1) ger

Svar $\quad N(\theta) = mg(3\cos\theta + 4)$

$N > 0 \;\; \forall\theta$ dvs kontakt

5) Före stöten för part A.

$$U = \Delta T + \underbrace{\Delta V_g}_{=0} + \Delta V_e$$

$$0 = \frac{1}{2} m V_{A_1}^2 - \frac{1}{2} k \delta^2$$

$$V_{A_1}^2 = \frac{k}{m} \delta^2 = \frac{9mg}{R} \cdot \frac{1}{m} \cdot R^2 = 9gR$$

$$\begin{cases} V_{A_1} = 3\sqrt{gR} & \text{Före stöten} \\ V_{B_1} = 0 \end{cases}$$

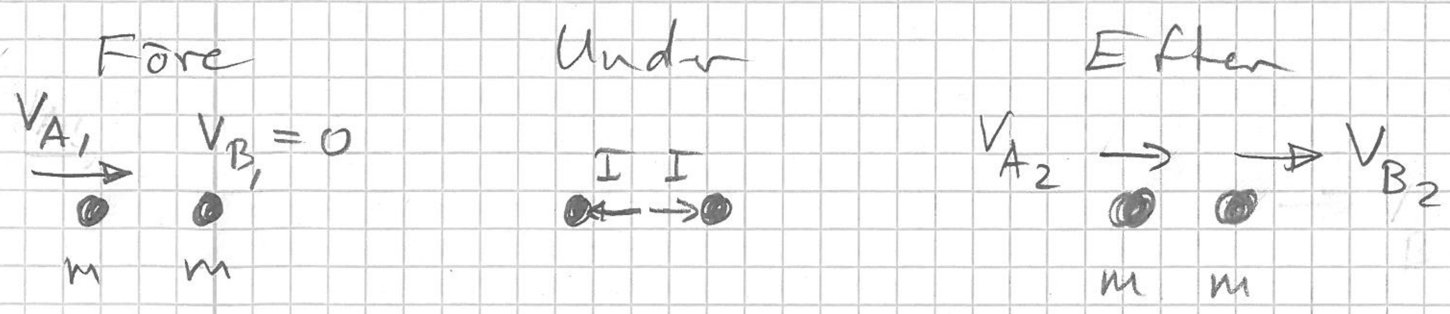
Efter stöten för part B.

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \underbrace{\Delta V_e}_{=0}$$

$$0 = 0 - \frac{1}{2} m V_{B_2}^2 + mg \cdot 2R$$

$$\begin{cases} V_{B_2} = 2\sqrt{gR} & \text{Efter stöten} \\ V_{A_2} = ? \end{cases}$$

Stöten



$$\Delta \bar{G}_{syst.} = \bar{0} \quad \text{ger}$$

$$\rightarrow \quad 0 = m v_{A_2} + m v_{B_2} - m v_{A_1}$$

ger $$v_{A_2} = v_{A_1} - v_{B_1} = 3\sqrt{gR} - 2\sqrt{gR}$$

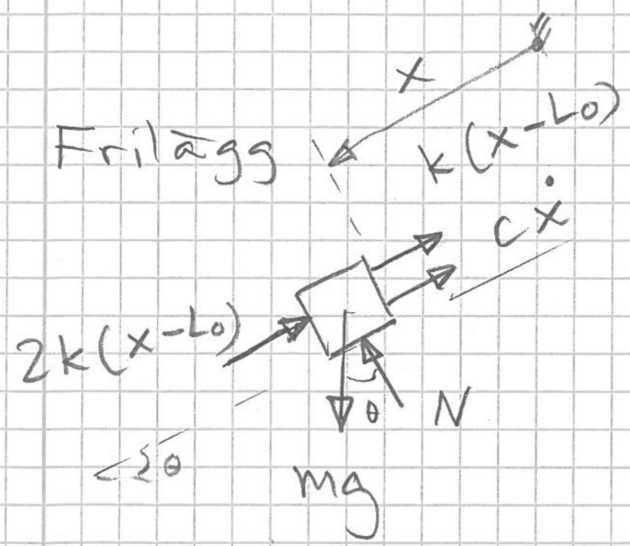
$$v_{A_2} = \sqrt{gR}$$

stöttalet $$e = \frac{v_{B_2} - v_{A_2}}{v_{A_1} - v_{B_1}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{gR} - \sqrt{gR}}{3\sqrt{gR} - 0} = \frac{1}{3}$$

Svar $e = \frac{1}{3}$

6) Frilägg



B.V. $t=0$

$$\begin{cases} x(0) = L_0 \\ \dot{x}(0) = V_0 = 2g\sqrt{\frac{m}{3k}} \end{cases}$$

$\theta = 30^\circ$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$

$x \swarrow$ $$mg\sin\theta - 3k(x-L_0) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{3k}{m}x = g\sin\theta + \frac{3k}{m}L_0 \quad (1)$$

Ident. med standardformen

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$$

$$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n \quad ; \quad \frac{3k}{m} = \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 x_1 = g\sin\theta + \frac{3k}{m}L_0$$

dvs med $c = 2\sqrt{3km}$ och $\sin\theta = \frac{1}{2}$ fås

$$\zeta = 1 \quad ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad ; \quad x_1 = \frac{mg}{6k} + L_0$$

$$x_p = x_1$$

(1) har lösn.

$$x = x_h + x_p \quad \text{dvs}$$

$$x = (A + B\cdot t)\, e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{6k} + L_0$$

B.V. $t = 0$

$x = L_0$ ger $A = -\dfrac{mg}{6k}$

$\dot{x} = V_0$ ger $B = V_0 - \dfrac{1}{2} g \sqrt{\dfrac{m}{3k}} =$

$= \dfrac{3}{2} g \sqrt{\dfrac{m}{3k}}$

Således:

$$x(t) = \left(-\frac{mg}{6k} + \frac{3}{2} g \sqrt{\frac{m}{3k}} \cdot t\right) e^{-\sqrt{\frac{3k}{m}} \cdot t}$$

$$+ \frac{mg}{6k} + L_0 \quad //$$