Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2012-10-22, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER1, TER2, TERC, TERD

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00 och 17.30)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivningstillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27, 2012-10-22

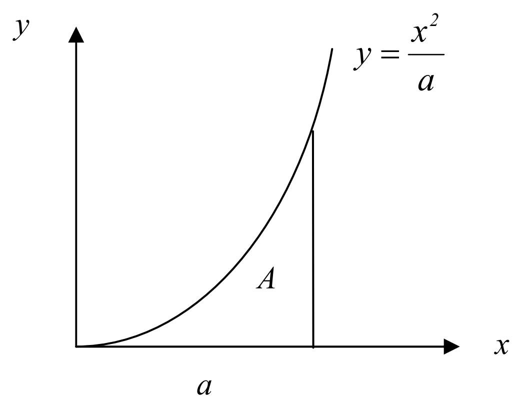
Teoridel:

1)

Centroiden för en yta definieras som bekant som punkten $\boldsymbol{r}_C = \dfrac{\int_A \boldsymbol{r}\, dA}{\int_A dA}$.

Utgå från definitionen ovan och visa att centroidens läge i y-led för arean A som begränsas av x-axeln samt kurvan $y = x^2/a$ och linjen $x = a$ i figuren ges av:

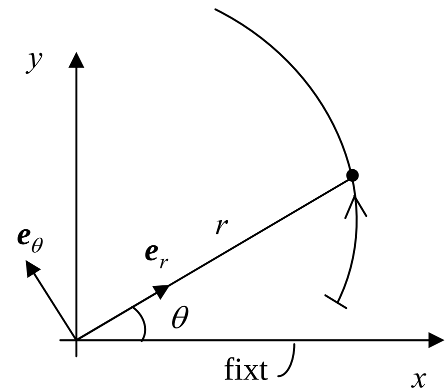
$$y_C = \frac{3a}{10} \qquad \text{(1p)}$$



2a)
Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ och definitionen av rörelsemängd $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$ och härled impulslagen för en partikel, dvs

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F}\, dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1 \qquad \text{(1p)}$$

2b)
En partikels bana i polära koordinater ges av $r = r(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där t är tiden, se figur.



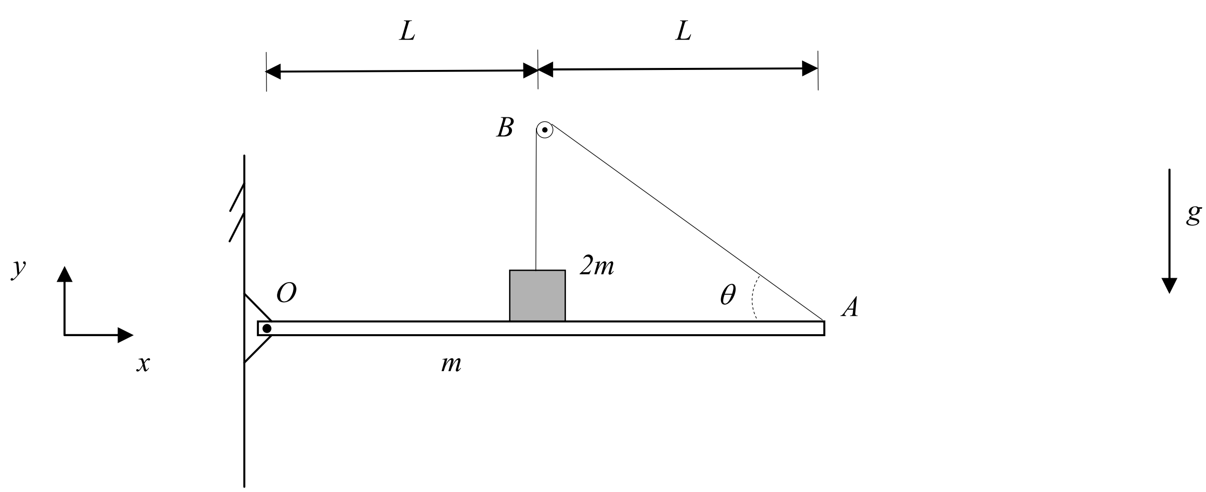
Visa att partikelns hastighetsvektor $\boldsymbol{v}$ i polära koordinater kan skrivas

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta \qquad (1p)$$

Problemdel:

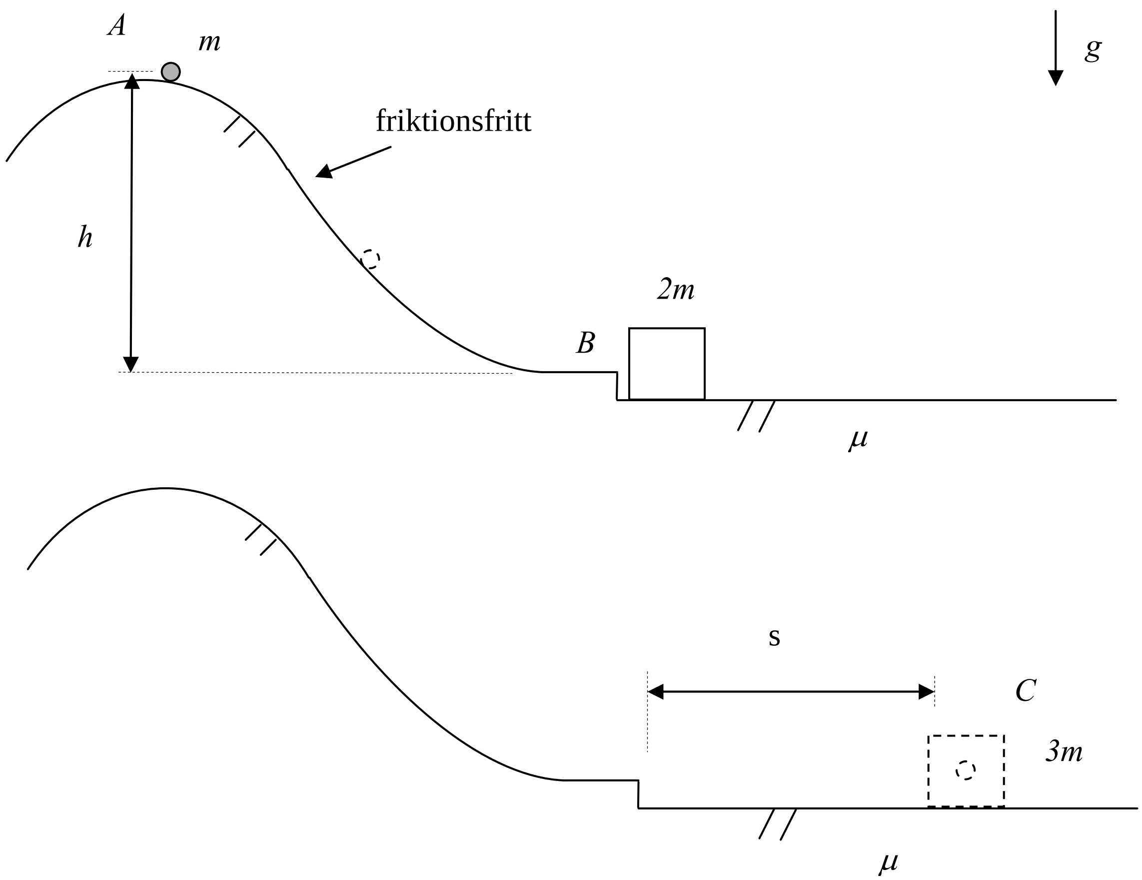
3)
En tunn horisontell stång OA med massan m och längden $2L$ hålles i jämvikt med hjälp av ett snöre och en vikt med massan $2m$ som är placerad på stången enligt figur. Snöret är fäst vid änden A och löper sedan över en fix trissa vid B och sedan vertikalt nedåt där det är fäst i vikten. Snöret bildar vinkeln $\theta = 30$ grader mot stången och all friktion kan försummas.

a) Beräkna dragkraften i snöret samt reaktionskraftens x och y komponent vid O. (2p)
b) Beräkna normalkraften (kontaktkraften) mellan vikten och stången. (1p)



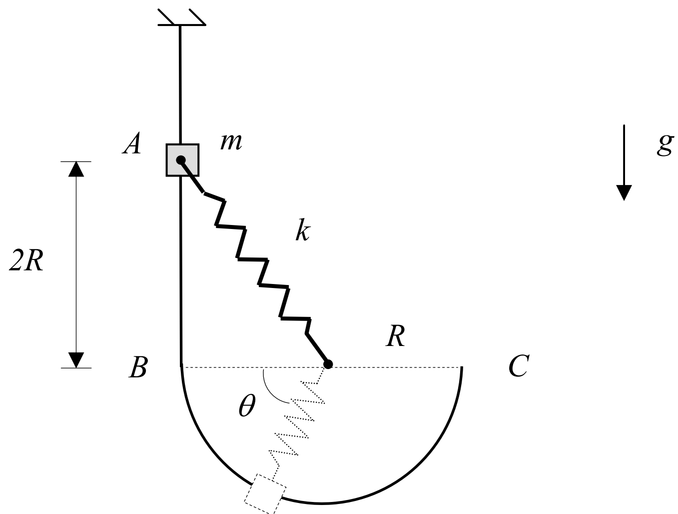
4)
En liten kula med massan m släpps från vila vid läge A på höjden h ovanför B enligt figur. När kulan når läge B stöter den ihop med en låda med massan $2m$ och fastnar i lådan i en fullständigt plastisk stöt (e=0). Före stöten är lådan stillastående och kulans hastighet vid B är horisontell. Kulans rörelse mellan A och B sker utan friktion medan rörelsen efter stöten sker med friktion där den kinetiska friktionskoefficienten är μ mellan lådan och det horisontella underlaget. Man observerar att lådan (med kulan inuti) stannar vid läge C då den rört sig sträckan s. Beräkna bromssträckan s.

(3p)



5)
En liten hylsa med massan *m* kan röra sig från *A* till *C* längs en stång enligt figur. Hylsan släpps utan hastighet vid läge *A* på höjden *2R* ovanför *B*. Hylsan rör sig först vertikalt nedåt och mellan *B* och *C* följer den en halvcirkel med radien *R* enligt figur. Beräkna normalkraften på hylsan från stången som funktion av vinkeln θ under den cirkulära delen av banan mellan *B* och *C*. Ingen friktion och fjäderkonstanten är $k=mg/R$ och fjäderns ospända längd är $L_0=R$.

(3p)

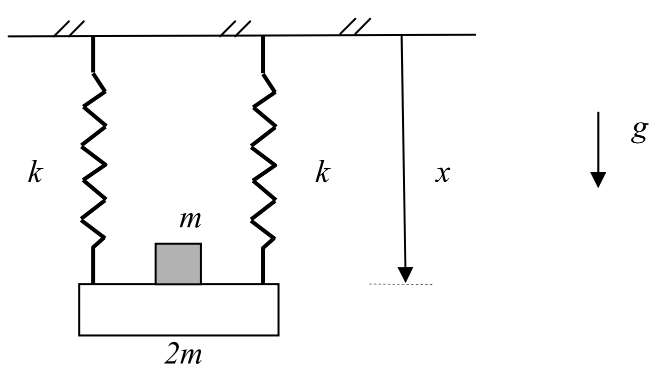


6)
Ett svängande system består av en platta med massan *2m* som är fäst i två likadana fjädrar med fjäderkonstanten *k* vardera. På plattan placeras sedan en låda med massan *m* enligt figur.

Systemet startas genom att man släpper systemet från vila i ett läge där $x = L_0 + \frac{9}{4}\frac{mg}{k}$.

Beräkna normalkraften mellan lådan och plattan som funktion av tiden *t* för den efterföljande rörelsen. Låt $t = 0$ då systemet startas. Fjädrarnas ospända längd är L_0.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1) $$\bar{r}_c = \frac{\int_A \bar{r}\, dA}{\int_A dA}$$ ger

(dxdy -element)

$$Y_c = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA} \; ; \quad dA = dx\,dy$$

$$\int_A y\, dA = \int_A y\, dx\,dy = \int_0^a \left[\int_0^{\frac{x^2}{a}} y\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2/a} dx = \int_0^a \frac{1}{2} \frac{x^4}{a^2}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{1}{a^2} \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{1}{10} a^3$$

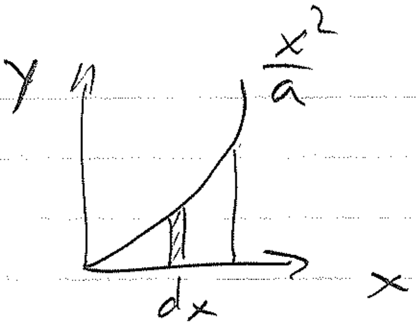
$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_0^a \left[\int_0^{\frac{x^2}{a}} dy \right] dx$$

$$= \int_0^a \left[y \right]_0^{x^2/a} dx = \int_0^a \frac{x^2}{a}\, dx = \left[\frac{1}{a} \frac{x^3}{3} \right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{3} a^2$$

ger $$Y_c = \frac{\frac{1}{10} a^3}{\frac{1}{3} a^2} = \frac{3}{10} a$$ V.S.V

Alt. dx-element



$$\begin{cases} dA = \frac{x^2}{a}dx \\ y_c^{el} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a} \end{cases}$$

$$y_c = \frac{\int_A y_c^{el} dA}{\int_A dA}$$

$$\int_A y_c^{el} dA = \int_0^a \frac{1}{2}\frac{x^2}{a}\frac{x^2}{a}dx = \int_0^a \frac{1}{2}\frac{x^4}{a^2}dx = \frac{1}{10}a^3$$

$$\int_A dA = \int_0^a \frac{x^2}{a}dx = \frac{1}{3}a^3$$

ger $y_c = \frac{3}{10}a$ v.s.v.

2a) $\Sigma \bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$

mult. med dt och integrera

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\bar{v})\,dt = \left[m\bar{v} \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= m\bar{v}(t_2) - m\bar{v}(t_1) = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$$

ty $\bar{G} = m\bar{v}$ enl. def.

Således: $\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\,dt = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ V.S.V

2b) $\bar{r} = r\bar{e}_r$

$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r$

men bassambandet ger

$\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y$

$\bar{e}_\theta = -\sin\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y$

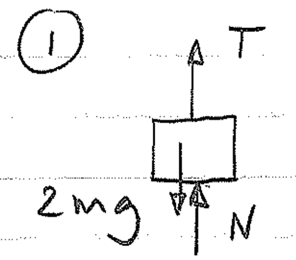
där $\bar{e}_x, \bar{e}_y$ är konstanta (fixa)

$\dot{\bar{e}}_r = -\sin\theta \cdot \dot{\theta}\,\bar{e}_x + \cos\theta \cdot \dot{\theta}\,\bar{e}_y = \dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$

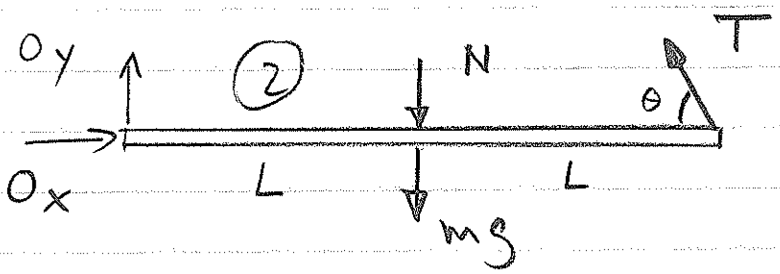
$\dot{\bar{e}}_\theta = -\cos\theta \cdot \dot{\theta}\,\bar{e}_x - \sin\theta \cdot \dot{\theta}\,\bar{e}_y = -\dot{\theta}\,\bar{e}_r$

ger $\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta$ V.S.V.

3) Frilägg delarna



$$\begin{cases} \theta = 30^\circ \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \\ \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



① $\Sigma F_y = 0$ ger

$$\uparrow \quad T - 2mg + N = 0 \qquad (1)$$

② $\Sigma F_x = 0, \ \Sigma F_y = 0, \ \Sigma M_z = 0$ ger

$$\rightarrow \quad O_x - T\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

$$\uparrow \quad O_y - N - mg + T\sin\theta = 0 \qquad (3)$$

$$\circlearrowleft O) \quad T\sin\theta \cdot 2L - N \cdot L - mg \cdot L = 0 \qquad (4)$$

(1), (2), (3), (4) ger
med $\theta = 30^\circ$

$$\begin{cases} T = \frac{3}{2}mg \\ O_x = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,mg \\ O_y = \frac{3}{4}mg \\ N = \frac{1}{2}mg \end{cases}$$

4) $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ (1)

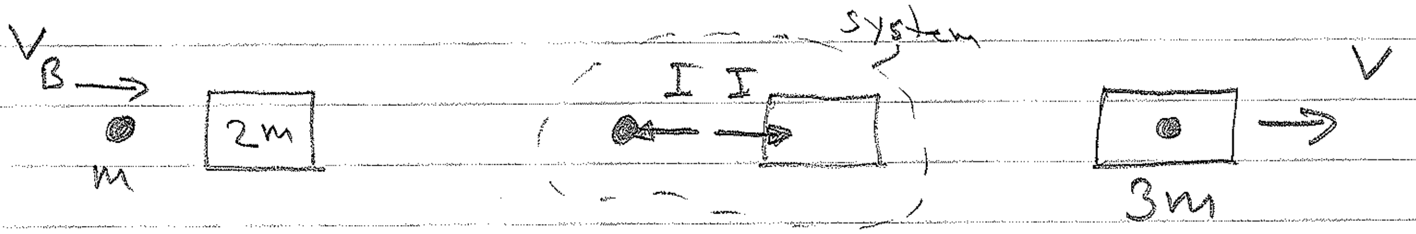
(1) ger mellan A–B

$$0 = \frac{1}{2} m v_B^2 - mgh + 0$$

dvs $v_B = \sqrt{2gh}$ (2)

STÖTEN

Före Under Efter

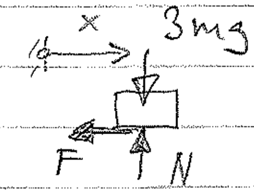


$$\bar{L}^{s}_{syst.} = \bar{G}_{2,syst.} - \bar{G}_{1,syst.} \text{ ger}$$

$$\rightarrow 0 = 3mv - (mv_B + 2m \cdot 0)$$

ger $v = \frac{1}{3} v_B$ (3)

(1) ger sedan mellan B–C



där $U = \int_0^s -F\,dx = -\mu 3mg \cdot s$

ty $F = \mu N$ och $N = 3mg$

och $\Delta T = 0 - \frac{1}{2}3mv^2$; $\Delta V_g = 0$; $\Delta V_e = 0$

$$-\mu 3mg \cdot s = -\frac{1}{2}3mv^2 + 0 + 0$$

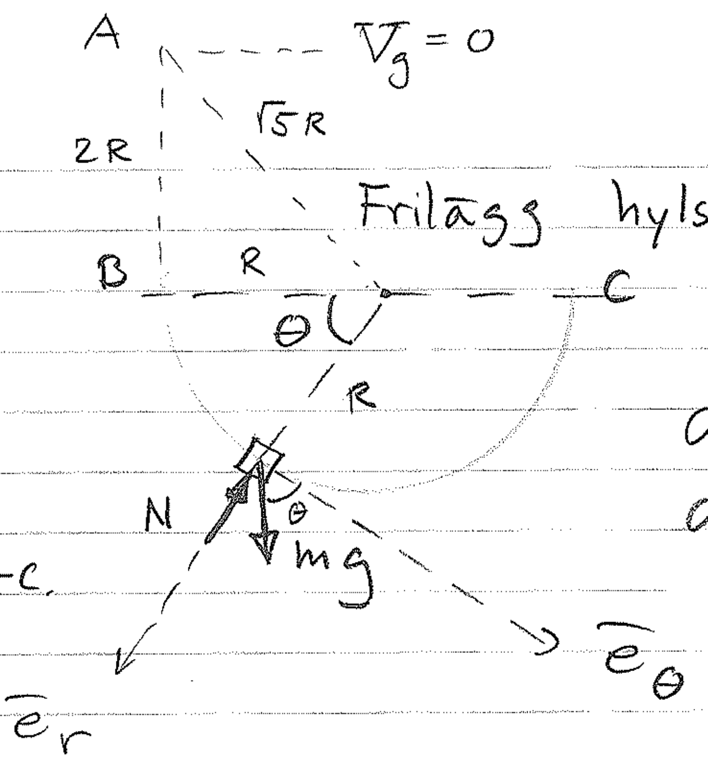
ger $s = \frac{v^2}{2\mu g}$

med (2), (3) fås

$$s = \frac{1}{2\mu g} \cdot \frac{1}{9} 2gh$$

dvs $s = \frac{h}{9\mu}$ //

5)



Frilägg hylsan

Fjädern ospänd mellan B-C.

Kinematik ($r = R = $ konst.)

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -R\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = R\ddot{\theta}$$

$$V_r = \dot{r} = 0$$

$$V_\theta = r\dot{\theta} = R\dot{\theta}$$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_r \swarrow$ $\quad mg\sin\theta - N = m(-R\dot{\theta}^2) \quad (1)$

$\bar{e}_\theta \searrow$ $\quad mg\cos\theta = mR\ddot{\theta}$

(1) ger $N = mg\sin\theta + mR\dot{\theta}^2$

men $V = R\dot{\theta}$ ger $N = mg\sin\theta + \frac{m}{R}V^2 \quad (2)$

Bestäm $V(\theta)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

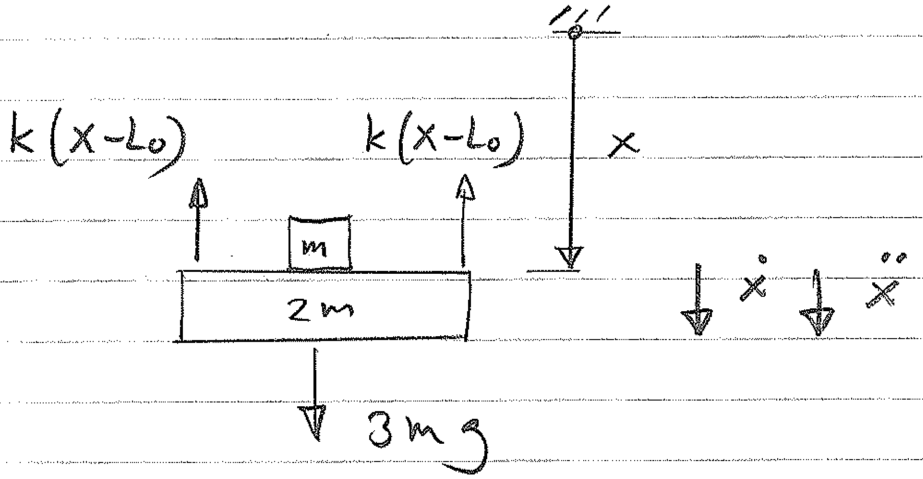
$$0 = \frac{1}{2}mV^2 - mg(2R + R\sin\theta) + \frac{1}{2}k(R-R)^2$$

$$- \frac{1}{2}k(\sqrt{5}\cdot R - R)^2 \quad \text{där} \quad k = mg/R$$

ger $V^2 = 2gR(5 - \sqrt{5} + \sin\theta)$ ins. i (2) ger

$$N(\theta) = mg(10 - 2\sqrt{5} + 3\sin\theta) \quad //$$

6) Frilägg $m+2m$



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\downarrow$ $3mg - 2k(x - L_0) = 3m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m} x = g + \frac{2k}{3m} L_0 \quad (1)$$

Ident. med $\ddot{x} + 2\zeta w_n \dot{x} + w_n^2 x = w_n^2 x_1$

ger $\zeta = 0$, $w_n^2 = \frac{2k}{3m}$, $x_1 = \frac{3mg}{2k} + L_0$

(1) har lösn. $x(t) = A\cos w_n t + B\sin w_n t + \frac{3mg}{2k} + L_0$

där $w_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$.

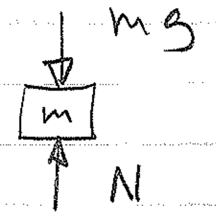
B.V. $t=0$ $\begin{cases} x = L_0 + \frac{9}{4}\frac{mg}{k} & \text{ger } A = \frac{3}{4}\frac{mg}{k} \\ \dot{x} = 0 & \text{ger } B = 0 \end{cases}$

Således $x(t) = \frac{3}{4}\frac{mg}{k}\cos\omega_n t + \frac{3mg}{2k} + L_0$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$. (2)

Beräkna normalkraften $N(t)$

Friläss m



$\downarrow \dot{x}$ $\downarrow \ddot{x}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$

$\downarrow$ $mg - N = m\ddot{x}$

dvs $N = mg - m\ddot{x}$ (3)

(2) ger $\ddot{x} = -\frac{1}{2} g \cos\omega_n t$ (derivera 2 ggr m.a.p. t)

ins i (3) ger

$$N(t) = mg\left(1 + \frac{1}{2}\cos\omega_n t\right) \quad //$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

($N > 0$ $\forall t$ dvs kontakt)