Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME18 (TMME27)

2012-01-11, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: ___________________

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00 och 17.30)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME18,   2012-01-11

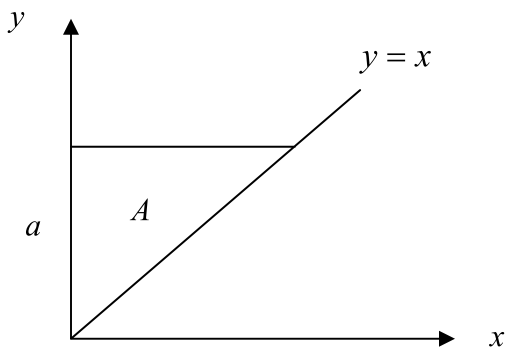
Teoridel:

1a)

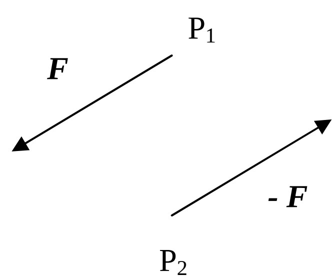
Centroiden för en yta definieras som bekant som punkten $\boldsymbol{r_C} = \dfrac{\int_A \boldsymbol{r}\, d\,A}{\int_A d\,A}$.

Utgå från definitionen ovan och visa att centroidens läge i y-led för arean A som begränsas av y-axeln samt linjen $y = x$ och linjen $y = a$ i figuren ges av:

$$y_C = \frac{2a}{3} \qquad \text{(1p)}$$



1b)
Givet ett kraftpar bestående av kraftvektorerna $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}$ och $\boldsymbol{F}_2= -\boldsymbol{F}$ med angreppspunkterna P_1 respektive P_2 enligt figur. Visa att kraftparets moment $\boldsymbol{M}$ är detsamma för alla momentpunkter.
(1p)



2)

Den kinetiska energin som en partikel har ges som bekant av $T = \frac{1}{2}mv^2$.

Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, och visa att

$$U = T_2 - T_1$$

där U är uträttat arbete längs en bankurva från läge $\boldsymbol{r}_1$ till $\boldsymbol{r}_2$, dvs

$$U = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \sum \boldsymbol{F} \circ d\,\boldsymbol{r}$$

(2p)

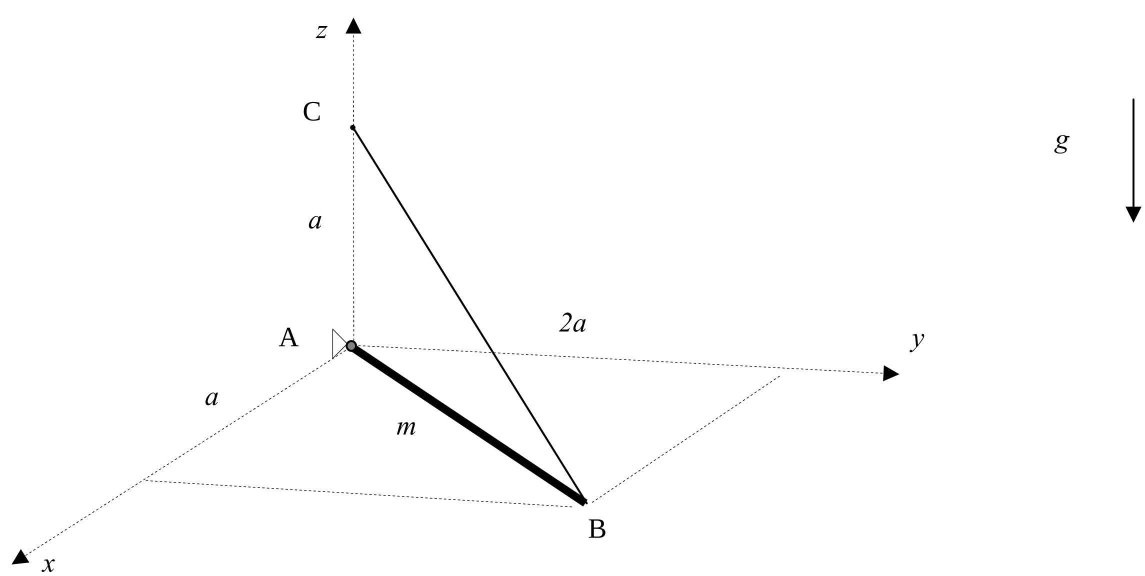
Ledning: $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \circ \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{v})$ där $\boldsymbol{v}$ är partikelns hastighetsvektor.

Problemdel:

3)

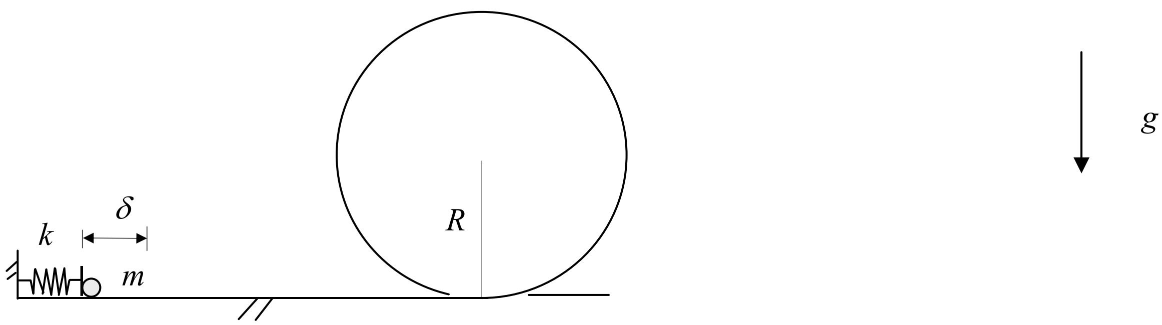
En homogen stång AB med massan m befinner sig i jämvikt i xy-planet. Stångens ena ände A är fäst i en friktionsfri kulled och i den andra änden B är ett snöre BC fäst som är fixerat vid C. Beräkna kraften i snöret BC vid jämvikt. Svara på vektorform i det givna koordinatsystemet. Geometri enligt figuren.

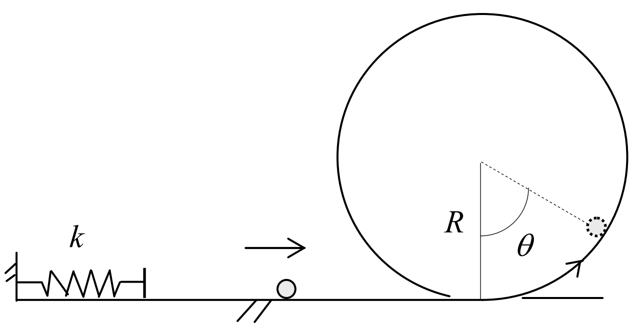
(2p)



4)
En partikel med massan m kan skjutas iväg med hjälp av en katapult som består av en fjäder med fjäderkonstanten $k=32mg/R$. Partikeln släpps utan hastighet då fjädern är ihoptryckt sträckan δ från det ospända läget, se figur. Efter att partikeln lämnat fjädern följer den en skena som först är horisontell och sedan övergår till en cirkelformad bana i ett vertikalplan. All friktion kan försummas. Hur stort måste δ minst vara för att partikeln skall vara i kontakt med skenan för alla vinklar $0 \le \theta \le 2\pi$ under den cirkulära delen av banan.

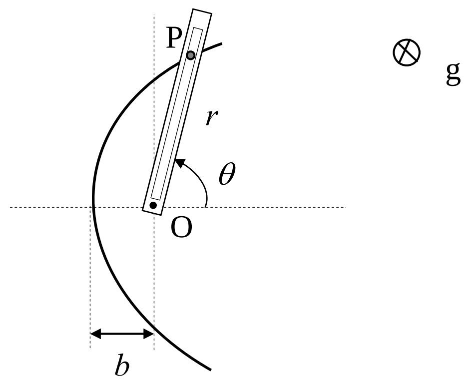
(3p)





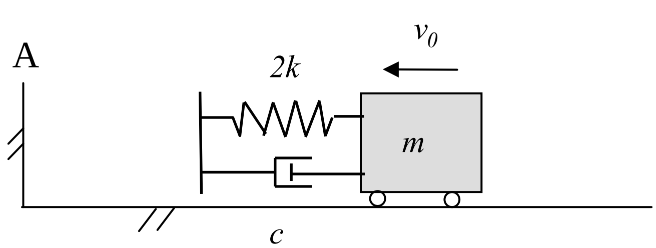
5)
En liten hylsa P kan friktionsfritt glida längs en fix stång enligt figur. Hylsans rörelse kontrolleras med hjälp av en spårförsedd arm som är lagrad vid O och roterar med konstant $\ddot{\theta} = \alpha$. Ekvationen för stången ges av $r = \dfrac{2b}{1 - cos\theta}$, där b är en given konstant och r är avståndet mellan O och P. Beräkna kraften som verkar på hylsan P från stången, samt kraften på hylsan P från armen då vinkeln $\theta=\pi$. Hylsan har massan m och all friktion kan försummas. Rörelsen sker i ett horisontalplan och startas utan hastighet då $\theta=\pi/3.$

(3p)



6)
En vagn med massan m är försedd med ett dämpsystem bestående av en fjäder med fjäder-konstanten $2k$ och en dämpare med dämpkonstanten $c = 2\sqrt{2km}$. Vagnen har hastigheten v_0 då dämpsystemet kommer i kontakt med den fixa vertikala väggen vid A. Innan kontakten är kraften i både fjädern och dämparen noll och fjädern har den ospända längden L_0. Beräkna fjäderns längd som funktion av tiden t under det tidsintervall dämpsystemet är i kontakt med väggen (låt $t=0$ då kontakten med väggen startar). Friktionen mellan vagnen och underlaget kan försummas.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

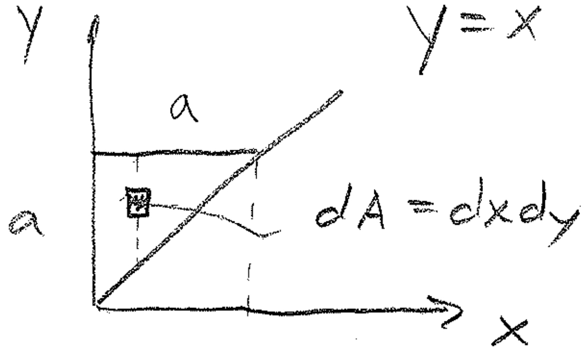
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1a) $$y_c = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}$$



$$\int_A y\,dA = \int_A y\,dx\,dy = \int_0^a \left[\int_x^a y\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{y^2}{2} \right]_x^a dx = \int_0^a \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{a^3}{3} \;//$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_0^a \left[\int_x^a dy \right] dx = \int_0^a [y]_x^a dx =$$

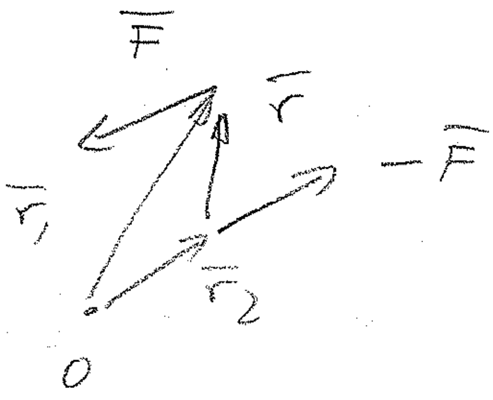
$$= \int_0^a (a - x)\,dx = \frac{1}{2}a^2 \;//$$

$$y_c = \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{2}{3}a \;//$$ V. S. V.

1b)

$$\bar{M}_O = \bar{r}_1 \times \bar{F} + \bar{r}_2 \times (-\bar{F})$$
$$= (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F} = \bar{r} \times \bar{F}$$

oberoende av O. V.S.V



2) $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ mult. med $d\bar{r}$ skalärt

$$\underbrace{\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \Sigma \bar{F} \circ d\bar{r}}_{U} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} m\bar{a} \circ d\bar{r}$$

$$U = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} m\bar{a} \circ d\bar{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\bar{v}}{dt} \circ \frac{d\bar{r}}{dt} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\bar{v}}{dt} \circ \bar{v}\, dt = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\bar{v} \circ \bar{v})\, dt =$$

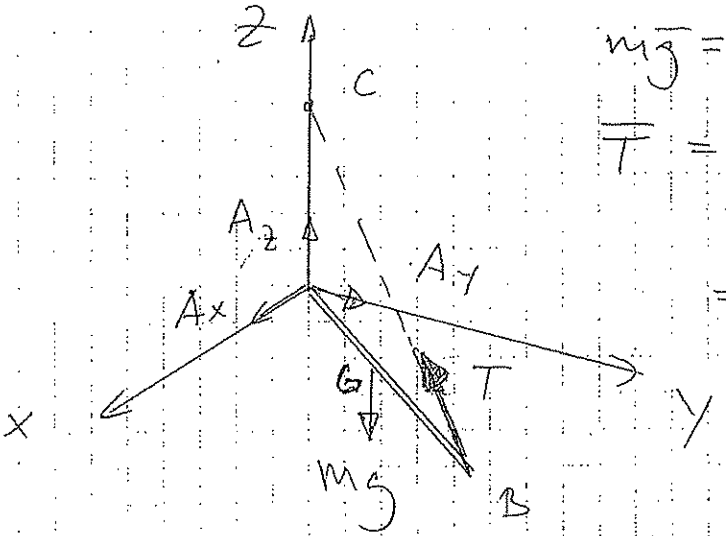
$$= \frac{m}{2}\left[|\bar{v}|^2\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2}\left[v^2\right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{m}{2}\left(v^2(t_2) - v^2(t_1)\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

dvs $U = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ eller

$U = T_2 - T_1$ v.s.v

3) Frilägg AB



$m\bar{g} = -mg\,\bar{e}_z$

$\bar{T} = T \cdot \dfrac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} =$

$= \dfrac{T}{\sqrt{6}}\left(-\bar{e}_x - 2\bar{e}_y + \bar{e}_z\right)$

$\Sigma\bar{M} = \bar{0}$ m.a.p. A ger

$\overline{AG} \times m\bar{g} + \overline{AB} \times \bar{T} = \bar{0}$ där

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{a}{2} & a & 0 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ a & 2a & 0 \\ -\frac{T}{\sqrt{6}} & -\frac{2T}{\sqrt{6}} & \frac{T}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \bar{0}$$

ger $\left(-mga + 2a\dfrac{T}{\sqrt{6}}\right)\bar{e}_x + \left(mg\dfrac{a}{2} - T\dfrac{a}{\sqrt{6}}\right)\bar{e}_y$

$= \bar{0}$

x: Led $-mga + 2a\dfrac{T}{\sqrt{6}} = 0$

y: Led $mg\dfrac{a}{2} - T\dfrac{a}{\sqrt{6}} = 0$

z: Led $0 = 0$

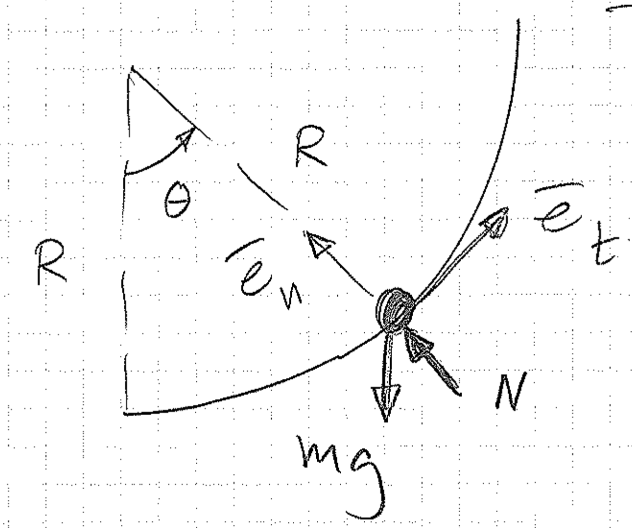
(en av ekv. kan strykas)

ger $T = \sqrt{6}\,\dfrac{mg}{2}$

dvs

$$\underline{\underline{\bar{T} = \frac{mg}{2}\left(-\bar{e}_x - 2\bar{e}_y + \bar{e}_z\right)}}$$

4)



Cirkelbana
Kinematik

$\rho = R$

$a_t = \ddot{s}$; $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\bar{e}_t \nearrow$ $-mg\sin\theta = m\ddot{s}$ (1)

$\bar{e}_n \nwarrow$ $N - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R}$ (2)

(2) ger $N = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2}{R}$ (3)

Bestäm $V(\theta)$ m.h.a. $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$0 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R - R\cos\theta) - \frac{1}{2}k\delta^2$

ger $v^2 = \dfrac{k}{m}\delta^2 - 2gR + 2gR\cos\theta$

ins. i (3) ger

$N(\theta) = 3mg\cos\theta - 2mg + \dfrac{k}{R}\delta^2$

Villkor $N \geq 0 \ \forall\theta$, dvs mest kritiskt då $\theta = \pi$ ger

$-5mg + \dfrac{k}{R}\delta^2 \geq 0$ med $k = 32mg/R$

fås $\delta \geq \sqrt{\dfrac{5}{32}}\,R$

5) Kinematik $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ (1)

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ (2)

där $r = \dfrac{2b}{1-\cos\theta}$; $\theta = \theta(t)$

eller $r - r\cos\theta = 2b$ (3)

(3) ger $\dot{r}$, $\ddot{r}$ och då $\theta = \pi$ fås

$\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = \dfrac{r}{2}\dot{\theta}^2$ samt $r = b$

$\ddot{\theta} = \alpha$ ger $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + C_1 t + C_2$

Vid $t = 0$ är $\theta = \dfrac{\pi}{3}$; $\dot{\theta} = 0$ vilket

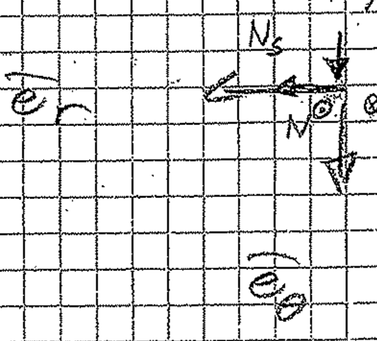
ger $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{\pi}{3}$, dvs $\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \dfrac{\pi}{3}$

Då $\theta = \pi$ fås tiden t_1 ur $\pi = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 + \dfrac{\pi}{3}$

dvs $t_1 = 2\sqrt{\dfrac{\pi}{3\alpha}}$ och $\dot{\theta}(t_1) = \alpha t_1 = 2\sqrt{\dfrac{\pi\alpha}{3}}$

(1), (2) ger sedan $\begin{cases} a_r = -\frac{2}{3} b\pi\alpha \\ a_\theta = b\alpha \end{cases}$

$\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$, $\theta = \pi$



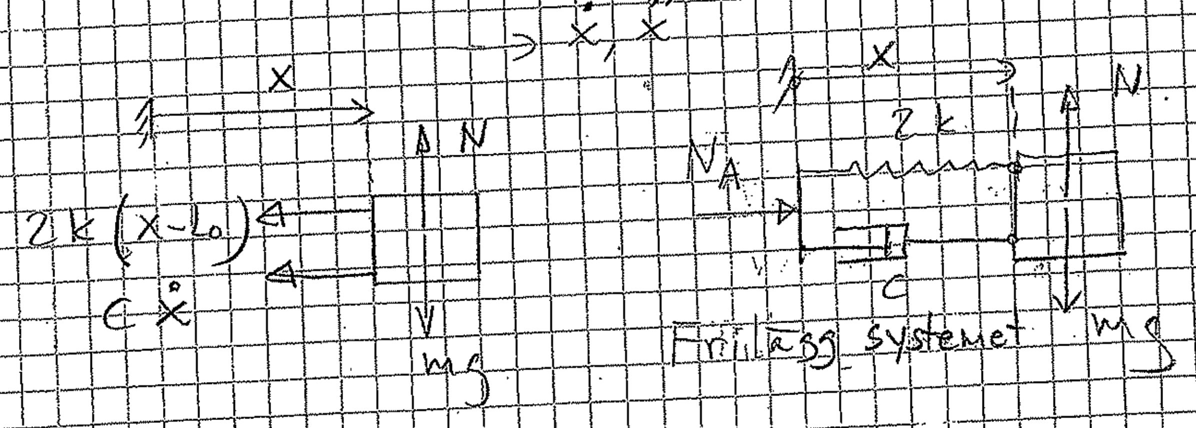
$\leftarrow$ $N_s = ma_r$

$\downarrow$ $N_A = ma_\theta$

$\odot$ $N - mg = 0$

<u>Svar:</u> $N_s = -\frac{2}{3} mb\pi\alpha$, $N_A = mb\alpha$, $N = mg$

6) Frilägg vagnen (x = fjäderns längd)
L_o = ospänd längd



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ för vagnen ger

$$-2k(x-L_o) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2k}{m}L_o \qquad (1)$$

Ident. ger $\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$; $\frac{2k}{m} = \omega_n^2$

med $c = 2\sqrt{2km}$ fås $\zeta = 1$ (kritiskt dämpat)

(1) har då lösningen

$$x(t) = (A+Bt)e^{-\omega_n t} + L_o \quad ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

B.V. $t=0$ $\begin{cases} x = L_o & \text{ger} \quad A = 0 \\ \dot{x} = -v_o & \text{ger} \quad B = -v_o \end{cases}$

Således: $\underline{x(t) = L_o - v_o \cdot t\, e^{-\omega_n t}}$; $\underline{\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ för systemet ger

$\longrightarrow \quad N_A = m\ddot{x} \quad (2)$

Vid kontakt med väggen är $N_A > 0$.

Vid gränsfallet $N_A = 0$ upphör kontakten.

(2) ger $N_A = m V_0 \omega_n e^{-\omega_n t}(2 - \omega_n t)$

Således $N_A = 0$ då $t = \frac{2}{\omega_n}$

Kontakten upphör vid $\underline{t = \frac{2}{\omega_n}}$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$