IEI–Mekanik, Linköpings universitet

Tentamen TEN1 i

TMME12, Mekanik I

12 april 2012, kl. 14.00–18.00

Lokal: TER4.

Examinator: Peter Christensen

Jourhavande lärare: Peter Christensen, tel. 281188. Besöker salen första gången ca 15.00.

Kurssekreterare: Anna Wahlund, tel. 281157, anna.wahlund@liu.se.

Antal uppgifter: 7 uppgifter på 1+4 sidor.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Betyg: 6 poäng av 15 möjliga krävs för godkänd tentamen. För betyg 4 och 5, krävs 9 respektive 12 poäng.

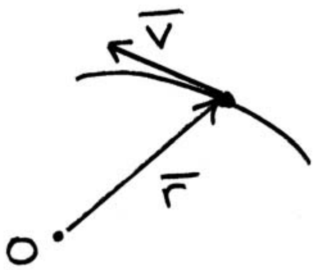
Lösningar: Lösningar läggs upp på kurshemsidan direkt efter tentamenstillfället.

Resultat: Resultat meddelas senast två veckor efter tentamenstillfället. Ingen visning; rättningsgranskning kan göras på studerandeexpeditionen belägen vid ingång A19c (öppettider: 10.00–11.30, 12.30–15.15). Eventuella klagomål ska framföras skriftligt.

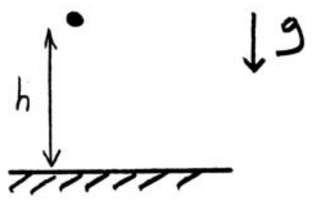
Instruktioner:

- Rita tydliga figurer och skriv med en lättläst piktur.
- Definiera införda storheter och motivera uppställda ekvationer.
- Om inte annat anges, får ekvationer på formelbladet användas utan bevis.
- Glöm inte att kontrollera svarens rimlighet.

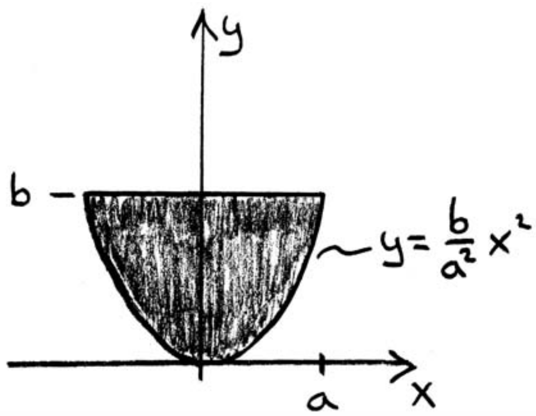
1. En masspunkt med massa m rör sig under inverkan av en centralkraft med kraftcentrum i den fixa punkten $\mathcal{O}$. Sektorhastigheten definieras som
$$\dot{A} = \frac{1}{2} |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| \, .$$
Visa att sektorhastigheten är konstant. (1p)



2. En masspunkt släpps från vila på höjden h ovanför ett golv. Till vilken höjd når masspunkten efter att ha studsat en gång mot golvet? Stöttalet är e. (1p)



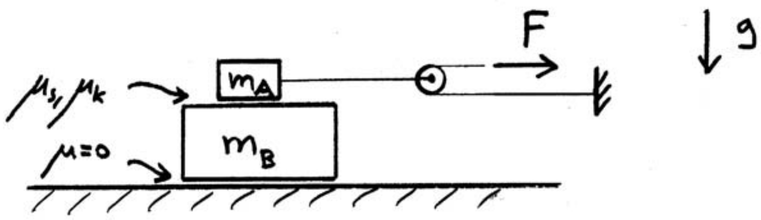
3. Bestäm läget av masscentrum för skivan. (1p)



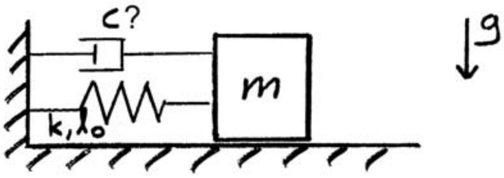
4. En kloss $\mathcal{A}$ med massa $m_{\mathcal{A}}$ ligger på en kloss $\mathcal{B}$ med massan $m_{\mathcal{B}}$. Kloss $\mathcal{B}$ ligger i sin tur på ett friktionsfritt underlag. Det statiska friktionstalet mellan klossarna är μ_s, medan det kinetiska är μ_k. Kloss $\mathcal{A}$ är sammankopplad med en vägg via ett snöre som löper över en trissa.

   a) Hur stor kan snörkraften F maximalt vara för att klossarna inte ska glida mot varandra (d.v.s. så att de rör sig som en enda kropp)? (2p)

   b) Man drar i snöret med en kraft F som är så pass stor att klossarna glider mot varandra. Bestäm klossarnas accelerationer. (1p)



5. Fjädern i figuren har den ospända längden l_0, och systemet är kritiskt dämpat. Ingen friktion. Vid $t = 0$ släpps klossen från vila då fjäderns längd är $3l_0/2$. Bestäm dämpningskonstanten c samt fjäderns längd då klossens fart är som störst. (3p)

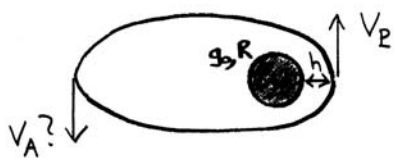


6. En satellit rör sig i en elliptisk bana kring jorden (g_0, R kända). Vid perigeum är dess höjd $h = R$ ovanför jorden, och farten är $v_{\mathcal{P}}$.

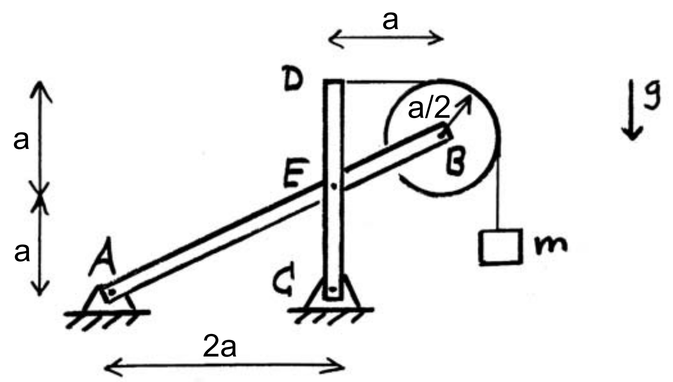
   a) Bestäm banans excentricitet e. (1p)

   b) Bestäm satellitens fart vid apogeum. (1p)

   c) Bestäm omloppstiden för satelliten. Det är tillåtet att använda resultatet från uppgift 1. Ledning: För en ellips är arean $A = \pi ab$ med beteckningar enligt formelbladet. Det är tillåtet att ha med storheter som a och e i svaret under förutsättning att uttryck för dessa tagits fram. (1p)



7. Två stänger och en trissa är sammankopplade enligt figuren. Över trissan hänger ett snöre med en vikt m i ena änden. Bestäm kraften på stång $\mathcal{AB}$ från stång $\mathcal{CD}$ vid $\mathcal{E}$. (3p)



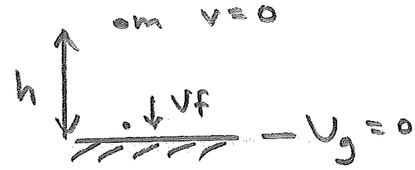
1)

$\bar{M}_O = \bar{0}$

$\therefore$ Impulsmomentlagen $\Rightarrow$ $\bar{h}_O = \bar{r} \times m\bar{v}$ konst

$\therefore$ $\dot{A} = \frac{1}{2}|\bar{r} \times \bar{v}|$ konst

2)



$$\underbrace{U}_{0} = \Delta T + \Delta V_g + \underbrace{\Delta V_e}_{0} \qquad (1)$$

Läge 1 (start):

$T_1 = 0$

$V_{g1} = mgh$

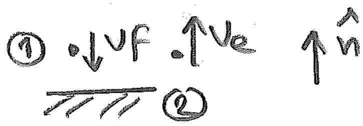
Läge 2 (precis före stöt):

$T_2 = \frac{m}{2} v_f^2$

$V_{g2} = 0$

$$(1) \Rightarrow \quad 0 = \frac{m}{2} v_f^2 - mgh \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{2gh}$$

Stöten:



$$e = \frac{v_{2,n}^e - v_{1,n}^e}{v_{1,n}^f - v_{2,n}^f} = \frac{0 - v_e}{-v_f - 0} \Leftrightarrow \quad v_e = e \cdot v_f$$

Läge 3 (precis efter stöt):

$T_3 = \frac{m}{2} v_e^2$

$V_{g3} = 0$

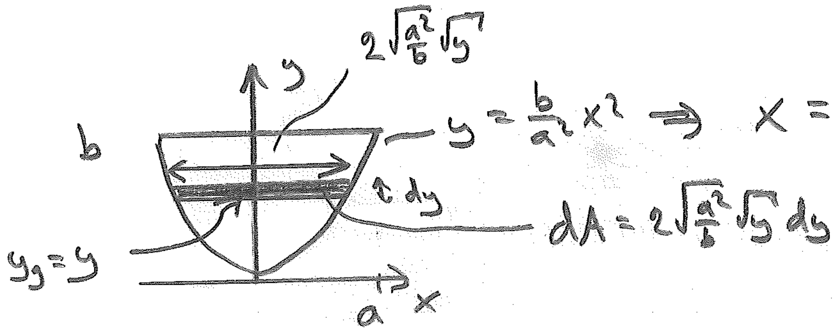
Läge 4 (maxhöjd h_1)

$T_4 = 0$

$V_{g4} = mgh_1$

$$(1) \Rightarrow \quad -\frac{m}{2} v_e^2 + mgh_1 = 0 \Leftrightarrow \quad h_1 = \frac{v_e^2}{2g} = \underline{\underline{\frac{e^2 v_f^2}{2g}}}$$

3)



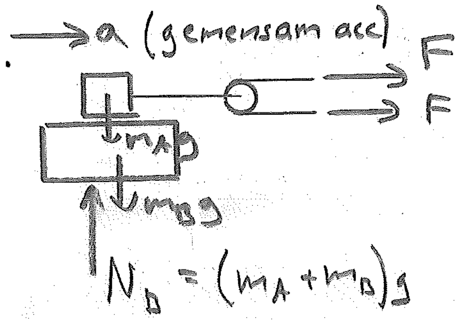
Symmetri $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x_G = 0}}$

$$y_G = \frac{\int y_g\, dA}{\int dA} = \frac{\int y\, dA}{\int dA} = \frac{\int_0^b y \cdot 2\sqrt{\frac{a^2}{b}}\sqrt{y}\, dy}{\int_0^b 2\sqrt{\frac{a^2}{b}}\sqrt{y}\, dy} =$$

$$= \frac{\int_0^b y^{\frac{3}{2}}\, dy}{\int_0^b \sqrt{y}\, dy} = \frac{\frac{2}{5} \cdot b^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}\, b^{\frac{3}{2}}} = \underline{\underline{\frac{3}{5}\, b}}$$

4/

Frilägg $m_A + m_B$:

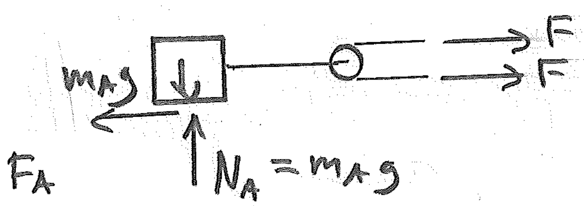


Newton II ($\bar{F} = m\bar{a}$):

$\rightarrow$: $2F = (m_A + m_B)a \Leftrightarrow$

$$a = \frac{2F}{m_A + m_B}$$

Frilägg m_A:



Newton II:

$\rightarrow$: $2F - F_A = m_A a$

$\Leftrightarrow$

$$F_A = 2F - m_A \cdot \frac{2F}{m_A + m_B} = 2F \frac{m_B}{m_A + m_B}$$

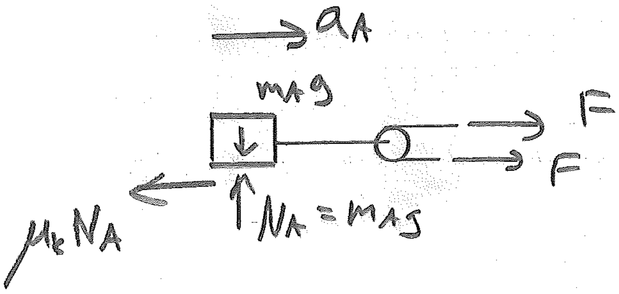
Glider ej om $|F_A| \leq \mu_s N_A = \mu_s m_A g \Leftrightarrow$

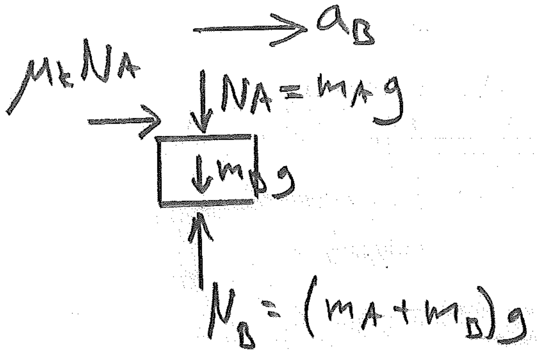
$$2F \frac{m_B}{m_A + m_B} \leq \mu_s m_A g \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{F \leq \mu_s \frac{m_A g}{2 m_B} (m_A + m_B)}}$$

4b)

Frilägg:





Newton II:

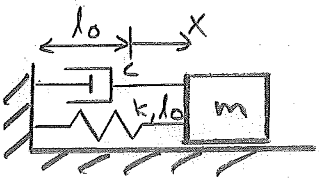
$\rightarrow$: $2F - \mu_k N_A = m_A a_A \Leftrightarrow$

$$\underline{\underline{a_A = \frac{2F - \mu_k m_A g}{m_A}, \rightarrow}}$$

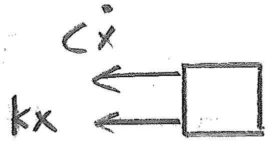
$\rightarrow$: $\mu_k m_A g = m_B a_B \Leftrightarrow$

$$\underline{\underline{a_B = \frac{\mu_k m_A g}{m_B}, \rightarrow}}$$

5) Mät t.ex. x från ospända läget:



Frilägg:



Newton II:

$$\rightarrow: \quad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\zeta\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2}x = 0$$

Kritiskt dämpat $\Rightarrow \zeta = 1$

$$\therefore \quad \frac{c}{m} = 2\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 2\sqrt{mk}}}$$

$HL = 0 \Rightarrow x = x_h$

Kritiskt dämpat $\Rightarrow \quad x_h = x = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$$\dot{x} = Be^{-\omega_n t} - \omega_n(A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

BV: $\quad x(0) = \frac{l_0}{2} \Rightarrow A = \frac{l_0}{2}$

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B - \omega_n A = 0 \Leftrightarrow B = \frac{l_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\therefore \quad x = \frac{l_0}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{k}{m}}t\right)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

$$\dot{x} = \frac{l_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} - \frac{l_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\left(1 + \sqrt{\frac{k}{m}}t\right)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

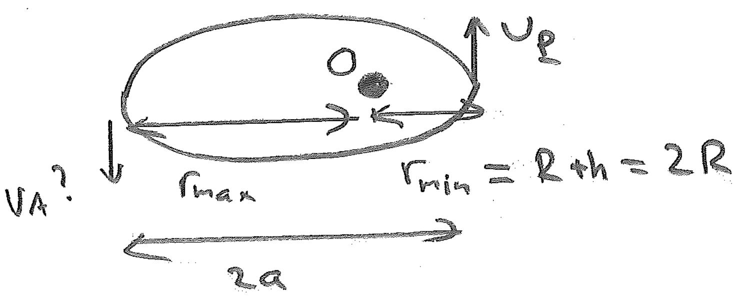
$$\ddot{x} = -\frac{l_0}{2}\frac{k}{m}e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} - \frac{l_0}{2}\frac{k}{m}e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \frac{l_0}{2}\frac{k}{m}\left(1 + \sqrt{\frac{k}{m}}t\right)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

V_{max} då $\ddot{x} = 0 \Rightarrow -2 + 1 + \sqrt{\frac{k}{m}}t = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{m}{k}}$

$$x\left(t = \sqrt{\frac{m}{k}}\right) = \frac{l_0}{2}(1+1)e^{-1} = \frac{l_0}{e}$$

$\therefore$ Fjäderns längd $= \underline{\underline{l_0 + \frac{l_0}{e}}}$

a)



$$v_P^2 = 2 g_0 R^2 \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{2a} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{g_0 R^2}{a} = g_0 R - v_P^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{R} - \frac{v_P^2}{g_0 R^2} \qquad (1)$$

$$r_{min} = a(1-e) = 2R \Leftrightarrow \quad 1-e = \frac{2R}{a} \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{e}} = 1 - \frac{2R}{a} = 1 - 2R\left(\frac{1}{R} - \frac{v_P^2}{g_0 R^2}\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2 v_P^2}{g_0 R} - 1}} \qquad (2)$$

b) Centralkraft $\Rightarrow$ $\bar{h}_O$ konst

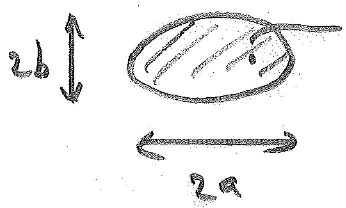
$$\therefore \underbrace{r_{min}}_{2R} v_P = \underbrace{r_{max}}_{a(1+e)} v_A \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{v_A}} = \frac{2R v_P}{a(1+e)} \overset{(1),(2)}{=} \frac{2R v_P \cdot g_0 R}{2 v_P^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{v_P^2}{g_0 R^2} \right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{g_0 R}{v_P} - v_P}} \qquad \left(\text{Alt}: v_A^2 = 2 g_0 R^2 \left(\frac{1}{a(1+e)} - \frac{1}{2a} \right) \right)$$

6c) Centralkraft $\Rightarrow$ $\dot{A}$ konst

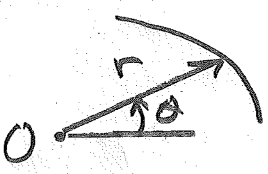
$\therefore \dot{A}\cdot\tau = A \iff \tau = \dfrac{A}{\dot{A}}$, τ omloppstid (3)

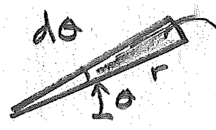


$A = \pi ab, \quad b = a\sqrt{1-e^2}$

$$A = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

$\dot{A}$?





$r\,d\theta$

$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r\underbrace{r\dot{\theta}}_{v_\theta} \quad \text{konst}$$

Vid perigeum:

$r = r_{min}$, så $\dot{r} = 0$ $\qquad (\bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$

$\therefore V = V_p = V_\theta$

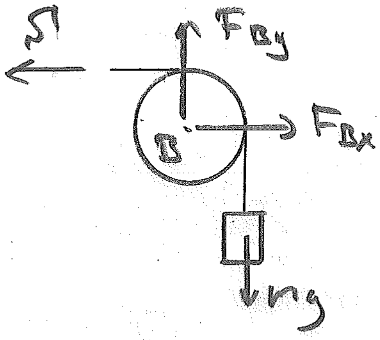
$$\therefore \dot{A} = \frac{1}{2}\underbrace{(2R)}_{r_{min}}\cdot v_p$$

Ins i (3) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\tau = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{R\,v_p}}}$$

, där a, e ges i (1), (2)

7) Frilägg trissan+m:

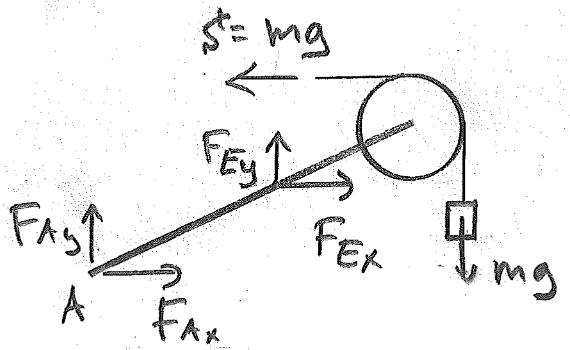


Jämvikt:

$\overset{\curvearrowright}{B}$: $mg\frac{a}{2} - S'\cdot\frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$S' = mg$

Frilägg AB+trissa+m:

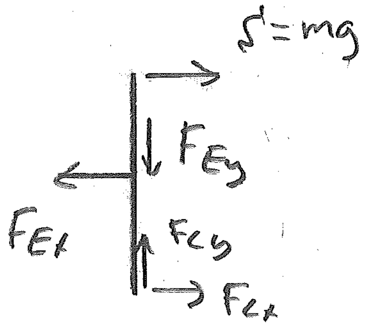


$\overset{\curvearrowright}{A}$: $F_{Ex}\cdot a - F_{Ey}\cdot 2a +$

$+ mg\cdot\frac{7}{2}a - mg\cdot 2a = 0$

(1)

Frilägg CD:



$\overset{\curvearrowright}{C}$: $-F_{Ex}\cdot a + mg\cdot 2a = 0$

$\Leftrightarrow$

$$\underline{\underline{F_{Ex} = 2mg, \rightarrow}}$$

Ins i (1) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{F_{Ey} = \frac{7}{4}mg, \uparrow}}$$