IEI–Mekanik, Linköpings universitet

Tentamen TEN1 i

TMME12, Mekanik I

16 december 2011, kl. 08.00–12.00

Lokal: TER3, TER4, TERE.

Examinator: Peter Christensen

Jourhavande lärare: Peter Christensen, tel. 281188. Besöker salarna första gången ca 09.00.

Kurssekreterare: Anna Wahlund, tel. 281157, anna.wahlund@liu.se.

Antal uppgifter: 7 uppgifter på 1+3 sidor.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Betyg: 6 poäng av 15 möjliga krävs för godkänd tentamen. För betyg 4 och 5, krävs 9 respektive 12 poäng.

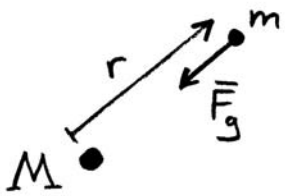
Lösningar: Lösningar läggs upp på kurshemsidan direkt efter tentamenstillfället.

Resultat: Resultat meddelas senast två veckor efter tentamenstillfället. Ingen visning; rättningsgranskning kan göras på studerandeexpeditionen belägen vid ingång A19c (öppettider: 10.00–11.30, 12.30–15.15). Eventuella klagomål ska framföras skriftligt.

Instruktioner:

- Rita tydliga figurer och skriv med en lättläst piktur.
- Definiera införda storheter och motivera uppställda ekvationer.
- Om inte annat anges, får ekvationer på formelbladet användas utan bevis.
- Glöm inte att kontrollera svarens rimlighet.

1. En masspunkt med massa m är utsatt för tyngdkraften $\boldsymbol{F}_g = -\dfrac{mMG}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}}$. Bestäm arbetet som tyngdkraften uträttar då avståndet från jorden ändras från r_1 till r_2. (1p)

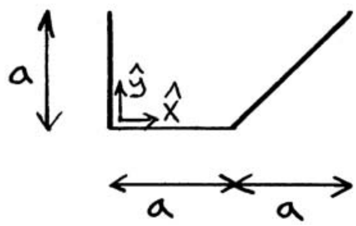


2. En punkt har lägesvektorn

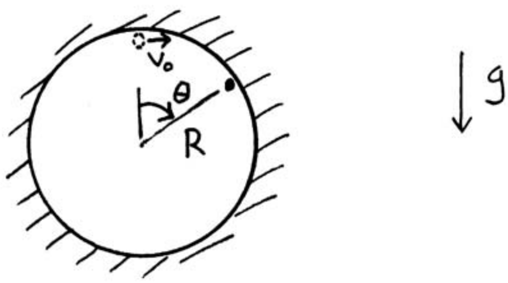
$$\boldsymbol{r} = t^2\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{2}{3}t^3\,\hat{\boldsymbol{y}} \text{ m},$$

där tiden t anges i sekunder. Bestäm läget av krökningscentrum för punktens bana då $t = 1$ s. (1p)

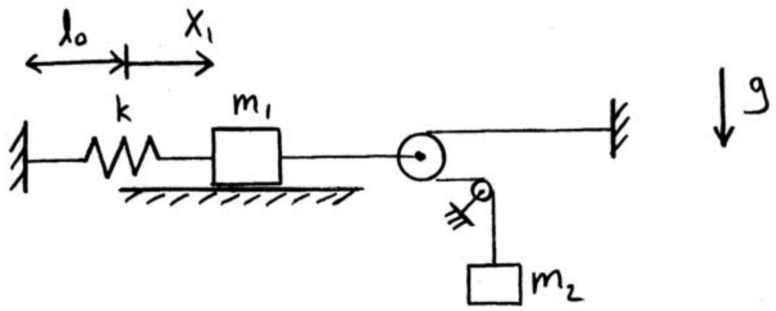
3. Bestäm läget av masscentrum för tråden. (1p)



4. En masspunkt med massan m rör sig utan friktion längs ett fixt cirkulärt underlag med radien R. Masspunkten har den givna farten v_0 i den högsta punkten på banan. Bestäm normalkraften på masspunkten från underlaget som funktion av vinkeln θ. Hur stor måste v_0 vara för att masspunkten aldrig ska förlora kontakten med underlaget? (3p)

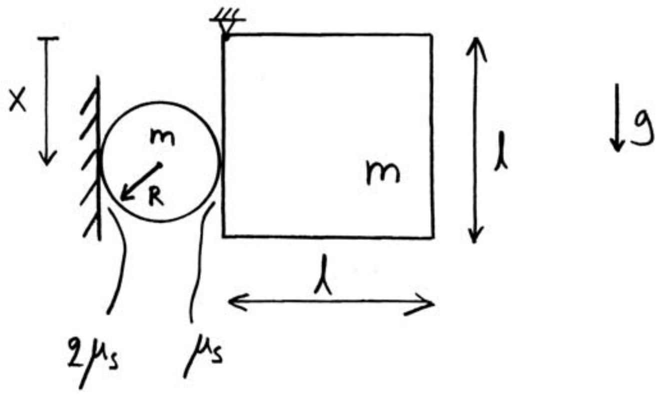


5. Systemet i figuren startas ur vila vid tiden $t = 0$ då fjädern är ospänd. Bestäm x_1 som funktion av tiden. Ingen friktion. (3p)



6. En kälke med massan m_1 står stilla på ett friktionsfritt underlag när en kloss med massan m_2 och farten v_0 landar på kälken. Friktionstalet mellan klossen och kälken är μ. Friktionen gör att klossen så småningom stannar på kälken. Bestäm därvid klossens och kälkens gemensamma fart, samt hur långt från kälkens vänsterkant som klossen stannar på kälken. (3p)

7. En cirkelskiva med massan m och en kvadratisk skiva med massan m är placerade enligt figuren. Bestäm hur stort avståndet x kan vara utan att cirkelskivan faller ner. (3p)



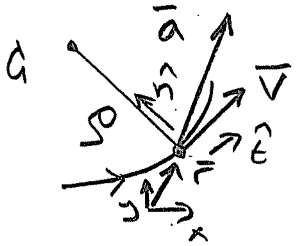
1) Se kompendiet

2) $\bar{r} = t^2\hat{x} + \frac{2}{3}t^3\hat{y} \Rightarrow \quad \bar{v} = \dot{\bar{r}} = 2t\hat{x} + 2t^2\hat{y}$

$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = 2\hat{x} + 4t\hat{y}$

$t = 1\,s \Rightarrow \quad \bar{v} = 2\hat{x} + 2\hat{y} \Rightarrow \quad \hat{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{y})$

$\bar{a} = 2\hat{x} + 4\hat{y}$



$\bar{r}_c = \bar{r} + \rho\hat{n}$

$\bar{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} \Rightarrow \quad \bar{a}\cdot\hat{t} = \dot{v}$

$\bar{a}\cdot\hat{t} = (2\hat{x} + 4\hat{y})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+4) = \frac{6}{\sqrt{2}} = \dot{v}$

$\therefore \frac{v^2}{\rho}\hat{n} = \bar{a} - \dot{v}\hat{t} = 2\hat{x} + 4\hat{y} - \frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{y}) =$

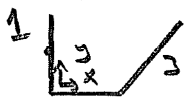
$= -\hat{x} + \hat{y} = \sqrt{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{x}+\hat{y})}_{\hat{n}}$ $(\perp \hat{t}$ ok!$)$

$\therefore \frac{v^2}{\rho} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{v^2}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ m

$\therefore \bar{r}_c = \bar{r} + \rho\hat{n} = \hat{x} + \frac{2}{3}\hat{y} + 4\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{x}+\hat{y}) = \underline{\underline{-3\hat{x} + \frac{14}{3}\hat{y}\ \text{m}}}$

---

3)



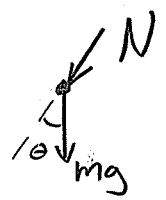
Del	1	2	3
l_i	a	a	$\sqrt{2}a$
x_{Gi}	0	$\frac{a}{2}$	$\frac{3a}{2}$
y_{Gi}	$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}$

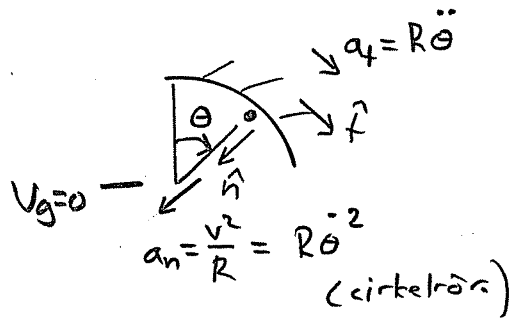
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} l_i x_{Gi}}{\sum_{i=1}^{3} l_i} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{2}\cdot\sqrt{2}}{2a + \sqrt{2}a} = \underline{\underline{\left(\frac{5\sqrt{2}}{4} - 1\right)a}}$$

$$y_G = \frac{\sum l_i y_{Gi}}{\sum l_i} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\sqrt{2}}{2a + \sqrt{2}a} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}a}}$$

4)

Frilägg:





Newton II:

$$\hat{n}: \quad N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

Bestäm $v^2 = v^2(\theta)$ m.h.a. arbete-energilagen: (alt: Varignon)

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \underbrace{\Delta V_e}_{0} \qquad (2)$$

Läge 1 (högst upp):	Läge 2 (θ)
$T_1 = \frac{m}{2}v_0^2$	$T_2 = \frac{m}{2}v^2$
$V_{g_1} = mgR$	$V_{g_2} = mgR\cos\theta$

$U = 0$ $\quad (\bar{N} \perp \bar{v} \Rightarrow \bar{N}$ arbetar inte$)$

Ins i (2) ⇒

$$0 = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) + mgR(\cos\theta - 1) \iff$$

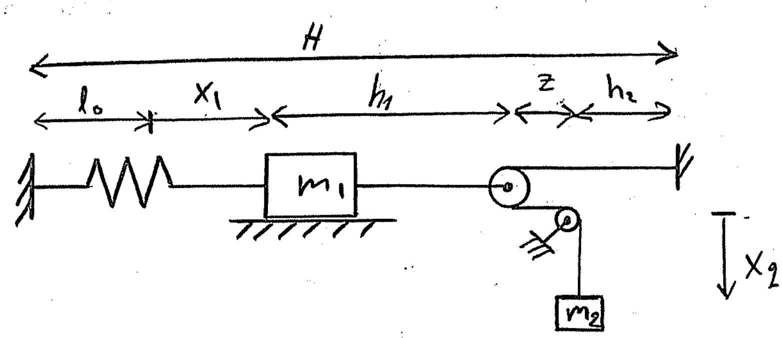
$$v^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\theta)$$

Ins i (1) ⇒

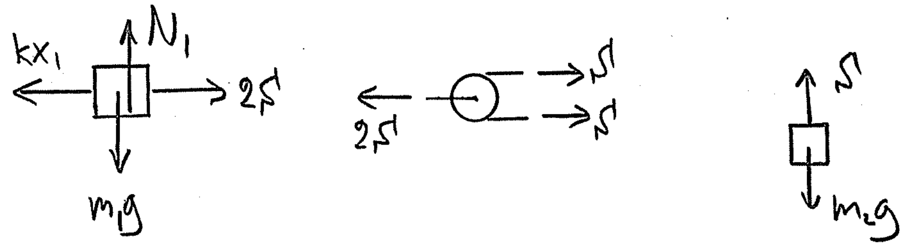
$$\underline{\underline{N}} = \frac{mv_0^2}{R} + 2mg(1-\cos\theta) - mg\cos\theta = \underline{\underline{\frac{mv_0^2}{R} + 2mg - 3mg\cos\theta}}$$

N_{min} för $\theta = 0$: $N_{min} = \frac{mv_0^2}{R} - mg > 0 \Rightarrow \underline{v_0 > \sqrt{gR}}$

5)



Frilägg:



Newton II:

$1, \rightarrow: \quad 2S - kx_1 = m_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$

$2, \downarrow: \quad m_2 g - S = m_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$

Snörlängd, $l = 2z + h_2 + x_2$

$$H = l_0 + x_1 + h_1 + z + h_2$$

H konst $\Rightarrow \quad 0 = \ddot{x}_1 + \ddot{z} \iff \ddot{z} = -\ddot{x}_1$

l konst $\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{2\ddot{z}}_{-\ddot{x}_1} + \ddot{x}_2 \iff \ddot{x}_2 = 2\ddot{x}_1$

$(2) \Rightarrow \quad S = m_2 g - m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - 2m_2 \ddot{x}_1$

Ins i $(1) \Rightarrow \quad 2m_2 g - 4m_2 \ddot{x}_1 - kx_1 = m_1 \ddot{x}_1 \iff$

$$\ddot{x}_1 + \underbrace{\frac{k}{m_1 + 4m_2}}_{\omega_n^2} x_1 = \frac{2m_2 g}{m_1 + 4m_2}$$

$x_1 = x_{1,h} + x_{1,p}$

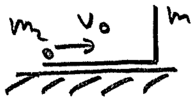
$x_{1,p} = C \Rightarrow C = \frac{2m_2 g}{k}$

$x_{1,h} = A\cos\omega_n t + B\cdot\sin\omega_n t$

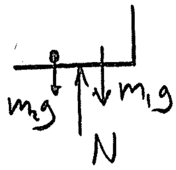
BV: $x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{2m_2 g}{k}, \ B = 0$

$$\therefore x_1 = \frac{2m_2 g}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m_1 + 4m_2}}\, t\right)$$

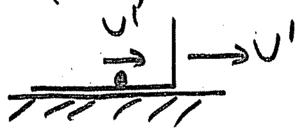
6) Före: $(t=t_1)$



Vid glidning:



Klossen stannat på kälken: $(t=t_2)$



Impulslagen $\left(\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{2} \bar{P}_2^{(i)} - \sum_{i=1}^{2} \bar{P}_1^{(i)}, \ \bar{P}^{(i)} = m_i \bar{v}_i \right)$:

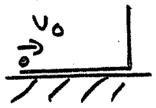
$$\rightarrow: \quad 0 = m_1 v' + m_2 v' - (0 + m_2 v_0) \iff$$

$$\underline{\underline{v' = \frac{m_2}{m_1+m_2} v_0}} \qquad (1)$$

Arbete-energilagen för klossen:

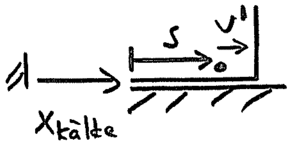
$$U = \Delta T + \underbrace{\Delta V_g + \Delta V_e}_{0} \qquad (2)$$

Läge 1:



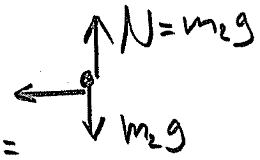
$$T_1 = \frac{m_2 v_0^2}{2}$$

Läge 2:



$$T_2 = \frac{m_2}{2}(v')^2$$

Frilägg:



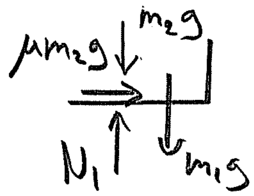
$F = \mu N = \mu m_2 g$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ konst.}}}{U =} -F \cdot \underbrace{(x_{kälke} + s)}_{\text{klossens totala rörelse}} = -\mu m_2 g (x_{kälke} + s) \qquad (3)$$

6 forts,

$X_{kälte}$?

Frilägg kälten:



Newton II:

$\rightarrow: \mu m_2 g = m_1 a_{kälte} \Leftrightarrow$

$$a_{kälte} = \frac{m_2}{m_1}\mu g$$

$$a_t \, ds = v \, dv \Rightarrow$$

$$\int_0^{X_{kälte}} a_{kälte} \, dx = \int_0^{v'} v \, dv \Leftrightarrow$$

$$\frac{m_2}{m_1}\mu g \cdot X_{kälte} = \frac{1}{2}(v')^2 \Leftrightarrow$$

$$X_{kälte} = \frac{m_1 (v')^2}{2 m_2 \mu g}$$

Ins i (3) $\Rightarrow$

$$U = -\frac{m_1 (v')^2}{2} - \mu m_2 g s$$

Ins i (2) $\Rightarrow$

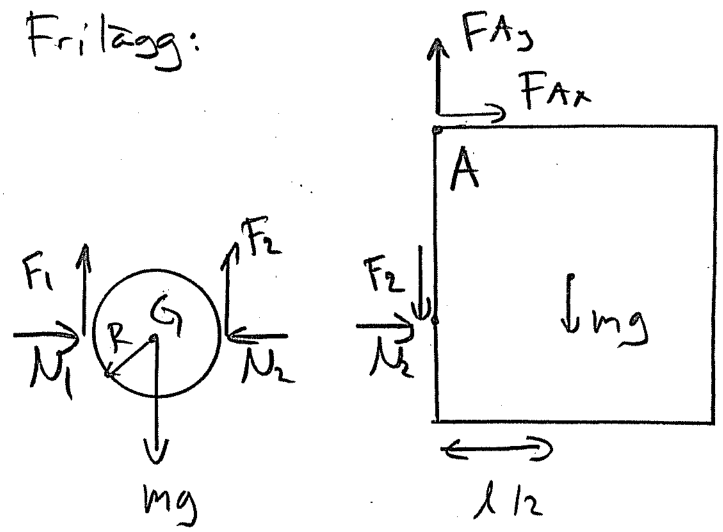
$$-\frac{m_1 (v')^2}{2} - \mu m_2 g s = \frac{m_2}{2}(v')^2 - \frac{m_2}{2} v_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{s}} = \frac{\frac{m_2}{2} v_0^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2) \cdot \frac{m_2^2 v_0^2}{(m_1+m_2)^2}}{\mu m_2 g}$$

$$= \frac{m_1 + m_2 - m_2}{2\mu g (m_1+m_2)} v_0^2 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{m_1}{2\mu g (m_1+m_2)} v_0^2}}$$

7) Frilägg:



Jämvikt:

Cirkelskivan:

$\rightarrow$: $N_1 - N_2 = 0$ (1)

$\uparrow$: $F_1 + F_2 - mg = 0$ (2)

$\overset{\curvearrowright}{G}$: $F_1 R - F_2 R = 0$ (3)

Kvadratiska skivan:

$\overset{\curvearrowright}{A}$: $-N_2 x + mg\frac{l}{2} = 0$ (4)

$(4) \Rightarrow N_2 = \frac{mgl}{2x}$ (5)

$(1) \Rightarrow N_1 = \frac{mgl}{2x}$

$(3) \Rightarrow F_1 = F_2$, $(2) \Rightarrow F_1 = F_2 = \frac{mg}{2}$

Vid jämvikt: $|F_1| \leq 2\mu_s N_1 \Rightarrow \frac{mg}{2} \leq 2\mu_s \cdot \frac{mgl}{2x} \Leftrightarrow$

$x \leq 2\mu_s \cdot l$

$|F_2| \leq \mu_s N_2 \Rightarrow \frac{mg}{2} \leq \mu_s \frac{mgl}{2x} \Leftrightarrow$

$x \leq \mu_s l$ $\therefore$ $\underline{\underline{x_{max} = \mu_s \cdot l}}$ för jämvikt