IEI–Mekanik, Linköpings universitet

Tentamen TEN1 i

TMME12, Mekanik I

26 augusti 2011, kl. 14.00–18.00

Lokal: TER3, TERE.

Examinator: Peter Christensen

Jourhavande lärare: Peter Christensen, tel. 281188. Besöker salarna första gången ca 15.00.

Kurssekreterare: Anna Wahlund, tel. 281157, anna.wahlund@liu.se.

Antal uppgifter: 7 uppgifter på 1+3 sidor.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Betyg: 6 poäng av 15 möjliga krävs för godkänd tentamen. För betyg 4 och 5, krävs 9 respektive 12 poäng.

Lösningar: Lösningar läggs upp på kurshemsidan direkt efter tentamenstillfället.

Resultat: Resultat meddelas senast två veckor efter tentamenstillfället. Ingen visning; rättningsgranskning kan göras på studerandeexpeditionen belägen vid ingång A19c (öppettider: 10.00–11.30, 12.30–15.15). Eventuella klagomål ska framföras skriftligt.

Instruktioner:

- Rita tydliga figurer och skriv med en lättläst piktur.
- Definiera införda storheter och motivera uppställda ekvationer.
- Om inte annat anges, får ekvationer på formelbladet användas utan bevis.
- Glöm inte att kontrollera svarens rimlighet.

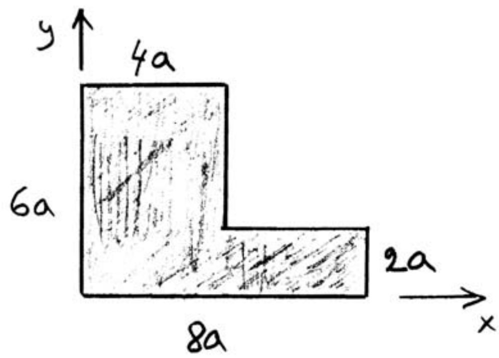
1. Härled uttrycket för en punkts acceleration i polära koordinater. (1p)

2. En masspunkt är fastsatt i en horisontell fjäder med fjäderkonstanten k. Förlängningen av fjädern ändras från δ_1 till δ_2. Visa genom integration att fjäderkraften på masspunkten därvid uträttar arbetet

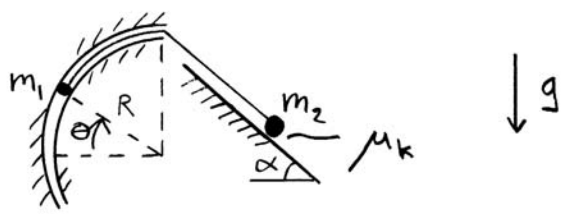
$$U_{\mathrm{fj}} = -\frac{k}{2}\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right).$$

(1p)

3. Bestäm läget av masscentrum för det skuggade området. (1p)



4. Masspunkterna 1 och 2 med massorna m_1 respektive m_2 är förbundna via ett snöre. Masspunkten 1 kan röra sig utan friktion längs ett cirkulärt spår med radie R. Masspunkten 2 rör sig nedåt längs ett plan som lutar vinkeln α. Intill masspunkt 2 är snöret parallellt med det lutande planet. Det kinetiska friktionstalet mellan masspunkt 2 och planet är μ_k. Bestäm snörkraften vid en godtycklig vinkel θ. (3p)

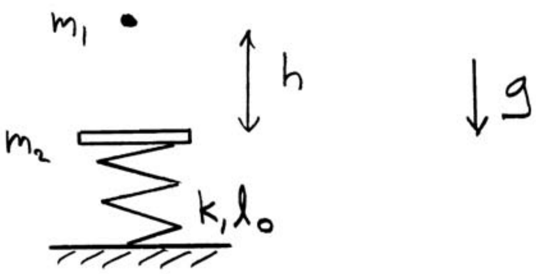


5. Vänstra fjäderänden i figuren påtvingas rörelsen $x_e = a \sin 2\sqrt{k/m}\, t$ där $a > 0$ är en konstant. Masspunktens läge ges av koordinaten x vilken är noll då fjädern är ospänd. Vid $t = 0$ är $x = 0$ och masspunkten är i vila. Ingen friktion.

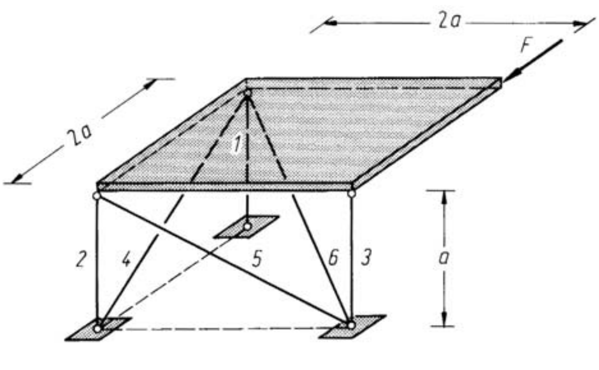
   a) Bestäm x som funktion av tiden. (2p)

   b) Hur stort är det maximala värdet av x? (1p)

6. En masspunkt med massan m_1 släpps från vila från höjden h och träffar en platta med massan m_2. Stöttalet är e. Plattan är fastsatt i en fjäder med fjäderkonstanten k och den ospända längden l_0. Innan stöten är plattan i jämvikt. Bestäm hur mycket extra fjädern trycks ihop, mätt från jämviktsläget, efter stöten. Masspunkten träffar bara plattan en gång. (3p)

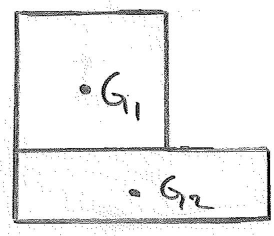


7. En platta belastas med kraften F enligt figuren. Bestäm krafterna i de sex stänger som håller uppe plattan. (3p)



1,2, Se kompendiet

3)

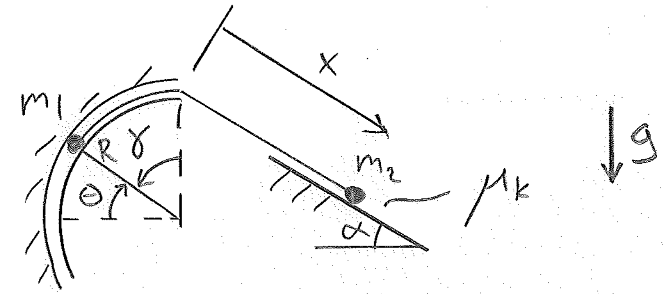


Del	1	2
A_i	$16a^2$	$16a^2$
x_{G_i}	$2a$	$4a$
y_{G_i}	$4a$	a

$$\underline{\underline{x_G}} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i x_{G_i}}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{32a^3 + 64a^3}{32a^2} = \underline{\underline{3a}}$$

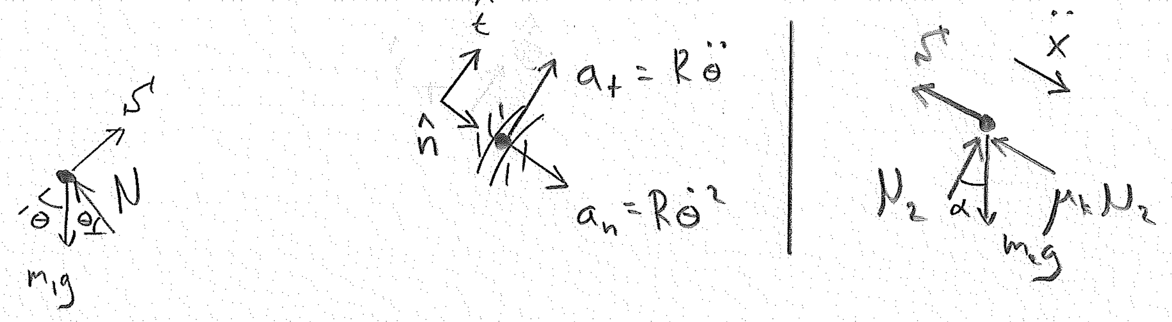
$$\underline{\underline{y_G}} = \frac{\sum A_i y_{G_i}}{\sum A_i} = \frac{64a^3 + 16a^3}{32a^2} = \underline{\underline{\frac{5}{2}a}}$$

4)



<u>Sökt:</u> S

Frilägg:



Newton II:

$$1: \begin{cases} \hat{n}: & m_1 g \sin\theta - N = m_1 R \dot{\theta}^2 \\ \hat{t}: & S - m_1 g \cos\theta = m_1 R \ddot{\theta} \end{cases} \qquad (1)$$

$$2: \begin{cases} \nearrow: & N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0 & (2) \\ \searrow: & -S - \mu_k N_2 + m_2 g \sin\alpha = m_2 \ddot{x} & (3) \end{cases}$$

Samband $\ddot{\theta}, \ddot{x}$?

Snörlängd, $l = x + R\gamma$

l konst $\Rightarrow$ $\ddot{x} + R\ddot{\gamma} = 0$

$\theta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \ddot{\gamma} = -\ddot{\theta}$

$$\therefore \quad \ddot{x} = R\ddot{\theta} \qquad (4)$$

(2), (3), (4) $\Rightarrow$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{m_2 R}\left(-S - \mu_k m_2 g \cos\alpha + m_2 g \sin\alpha\right)$$

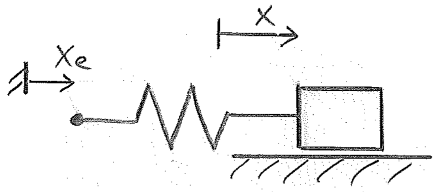
Ins i (1) $\Rightarrow$

$$S - m_1 g \cos\theta = -\frac{m_1}{m_2} S - \mu_k m_1 g \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow$$

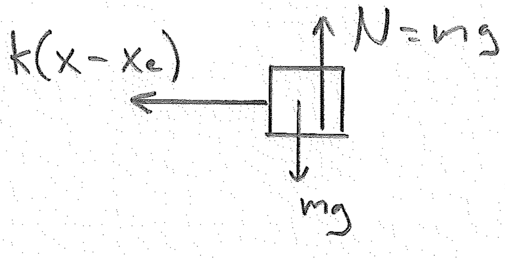
$$\boxed{S = \frac{m_1 g(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha + \cos\theta)}{1 + \frac{m_1}{m_2}}}$$

5/



Sökt: x, x_{max}

Frilägg:



Newton II:

$\rightarrow: \quad -k(x-x_e) = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2} x = \frac{k}{m} \cdot a \cdot \sin \underbrace{2\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega} t \qquad (1)$$

$$x = x_p + x_h$$

$$x_p = /\omega \neq \omega_n/ = X \sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$\dot{x}_p = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\, X \cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$\ddot{x}_p = -4 \frac{k}{m} X \sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

Ins. i (1) $\Rightarrow$

$$-4\frac{k}{m} X \sin 2\sqrt{\cdot}\, t + \frac{k}{m} \cdot X \sin 2\sqrt{\cdot}\, t = \frac{ka}{m} \sin 2\sqrt{\cdot}\, t \Leftrightarrow$$

$$\bar{X} = -\frac{a}{3}$$

$$x_h = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

$$\dot{x}_h = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

<u>BV</u>:

$$x(0) = 0 \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \quad 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,\underbrace{\bar{X}}_{-\frac{a}{3}} + B\sqrt{\frac{k}{m}} = 0 \iff$$

$$B = \frac{2a}{3}$$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{3}\left(2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

(2)

b, x_{max} då $\dot{x} = 0$

$$\dot{x} = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\left(2\cos\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}_{\theta} - 2\cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = 0 \iff$$

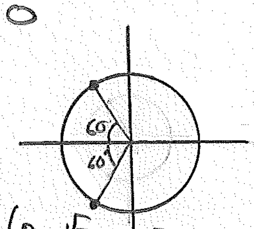
$$\cos\theta - \cos 2\theta = 0 \iff$$

$$\cos\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 \iff$$

$$\cos\theta - 2\cos^2\theta + 1 = 0 \iff$$

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 2}}{-2\cdot 2} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0, 2\pi, \text{---} \Rightarrow x = 0$$

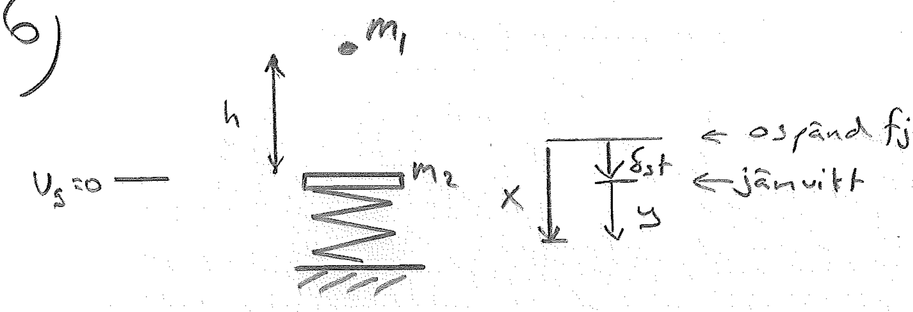


$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \text{---} \Rightarrow x = \frac{a}{3}\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \text{---} \Rightarrow x = \frac{a}{3}\left(-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore \underline{\underline{X_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2}a}}$$

6)



<u>Sökt:</u> y_{max}

m_1:s fart före stöten?

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \underbrace{\Delta V_e}_{0} \quad (1)$$

Läge 1 (start)

$T_1 = 0$

$V_{g_1} = m_1 g h$

Läge 2 (före stöt)

$T_2 = \frac{m_1}{2} v_{1f}^2$

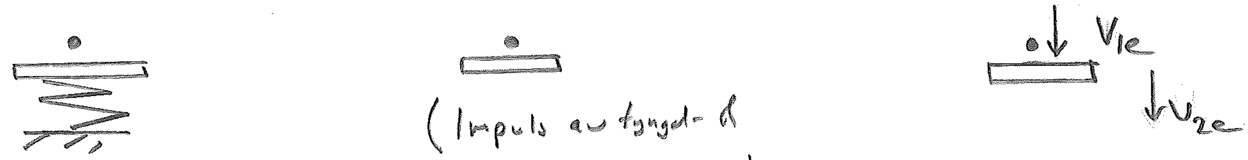
$V_{g_2} = 0$

$U = 0$

$$(1) \Rightarrow \quad \frac{m_1}{2} v_{1f}^2 - m_1 g h = 0 \Leftrightarrow v_{1f} = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Stöten – Studerar $m_1 + m_2$:

precis före: Vid: precis efter



(Impuls av tyngd- & fjäderkraften = 0)

Stötimpulslagen för $m_1 + m_2$ $\left(\bar{I}^{s,ext} = \sum_{i=1}^{2} \bar{p}^{i,e} - \sum_{i=1}^{2} \bar{p}^{i,f}, \; \bar{p}^i = m_i \bar{v}_i \right)$

$$\downarrow: 0 = m_1 v_{1e} + m_2 v_{2e} - (m_1 v_{1f} + 0) \quad (2)$$

Stöttal:

$$e = \frac{v_{2e} - v_{1e}}{v_{1f} - v_{2f}} = \frac{v_{2e} - v_{1e}}{\sqrt{2gh} - 0} \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \quad v_{1e} = v_{2e} - e \cdot \sqrt{2gh}$$

Ins. i (2) $\Rightarrow$

$$0 = m_1 \left(v_{2e} - e \cdot \sqrt{2gh} \right) + m_2 v_{2e} - m_1 \sqrt{2gh}$$

$\Leftrightarrow$

$$v_{2e} = \frac{(1+e) m_1 \sqrt{2gh}}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

X_{max} då $\dot{x} = 0$ (vändläge):

Läge 3 (efter stöt):

$$T_3 = \frac{m_2 v_{2e}^2}{2}$$

$$U_{g2} = 0$$

$$V_{e_1} = \frac{k}{2} \delta_{st}^2$$

Läge 4 (x_{max}):

$$T_4 = 0$$

$$U_{g3} = -m_2 g y_{max}$$

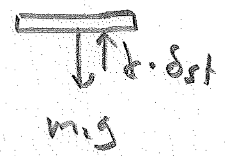
$$U_{e_2} = \frac{k}{2} (y_{max} + \delta_{st})^2$$

(1) $\Rightarrow$

$$-\frac{m_2 v_{2e}^2}{2} - m_2 g y_{max} + \frac{k}{2} \left(y_{max}^2 + \delta_{st}^2 + 2 y_{max} \delta_{st} - \delta_{st}^2 \right)$$
$$= 0$$

δ_{st} ?

Frilägg:



Jämvikt:

$$\downarrow : \quad m_2 g - k\cdot\delta_{st} = 0 \iff$$

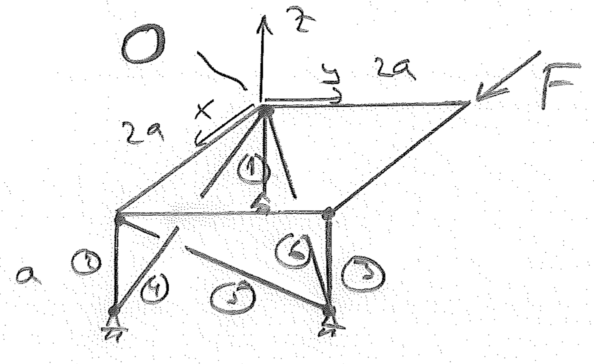
$$\delta_{st} = \frac{m_2 g}{k}$$

Ins i (5) $\Rightarrow$

$$-\frac{m_2 v_{2e}^2}{2} - \cancel{m_2 g y_{max}} + \frac{k}{2} y_{max}^2 + \cancel{k y_{max} \frac{m_2 g}{k}} = 0 \iff$$

$$\underline{\underline{y_{max}}} = \sqrt{\frac{m_2}{k}}\, v_{2e} \overset{(4)}{=} \underline{\underline{\sqrt{\frac{2 m_2 g h}{k}}\, \frac{(1+e)\cdot m_1}{m_1+m_2}}}$$

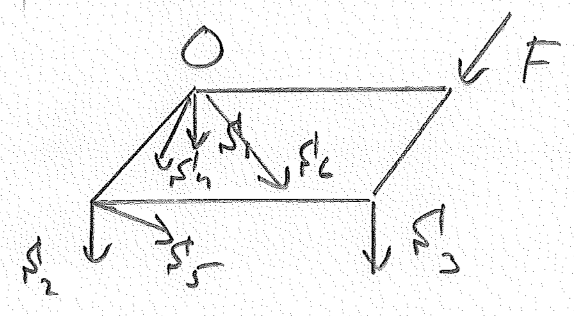
7)



<u>Sökt:</u> $S_1, \ldots, S_6$

Alla stänger är tvåkraftskroppar!

Frilägg plattan:



$\bar{S}_1 = -S_1 \hat{z}$, $\quad \bar{S}_2 = -S_2 \hat{z}$, $\quad \bar{S}_3 = -S_3 \hat{z}$

$\bar{S}_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} S_4 \left(2\hat{x} - \hat{z}\right)$, $\quad \bar{S}_5 = \frac{1}{\sqrt{5}} S_5 \left(2\hat{y} - \hat{z}\right)$

$\bar{S}_6 = \frac{1}{3} S_6 \left(2\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}\right)$

Jämvikt:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{6} \bar{S}_i + F\hat{x} = \bar{0}$$

$$\bar{M}_O = \sum \bar{r}_i \times \bar{S}_i + 2a\hat{y} \times F\hat{x} = \bar{0}$$

$$\Longrightarrow$$

$\bar{F} = \bar{0}$:

$\hat{x}$: $\frac{2}{\sqrt{5}} S_4' + \frac{2}{3} S_6' + F = 0$ (1)

$\hat{y}$: $\frac{2}{\sqrt{5}} S_5' + \frac{2}{3} S_6' = 0$ (2)

$\hat{z}$: $-S_1' - S_2' - S_3' - \frac{1}{\sqrt{5}} S_4' - \frac{1}{\sqrt{5}} S_5' - \frac{1}{3} S_6' = 0$ (3)

$\bar{M}_0 = \bar{0}$:

$$2a\hat{x} \times (-S_2'\hat{z}) + (2a\hat{x} + 2a\hat{y}) \times (-S_3'\hat{z}) +$$
$$+ 2a\hat{x} \times \frac{1}{\sqrt{5}} S_5' (2\hat{y} - \hat{z}) - 2aF\hat{z}$$

$$= 2aS_2'\hat{y} + 2aS_3'\hat{y} - 2aS_3'\hat{x} +$$
$$+ \frac{4a}{\sqrt{5}} S_5'\hat{z} + \frac{2a}{\sqrt{5}} S_5'\hat{y} - 2aF\hat{z} = 0 \Rightarrow$$

$\hat{x}$: $2aS_3' = 0$ (4)

$\hat{y}$: $2aS_2' + 2aS_3' + \frac{2a}{\sqrt{5}} S_5' = 0$ (5)

$\hat{z}$: $\frac{4a}{\sqrt{5}} S_5' - 2aF = 0$ (6)

$$(4) \Rightarrow \quad S_3 = 0$$

$$(6) \Rightarrow \quad S_5 = \frac{\sqrt{5}}{2} F$$

$$(2) \Rightarrow \quad S_6 = -\frac{3}{\sqrt{5}} S_5 = -\frac{3}{2} F$$

$$(1) \Rightarrow \quad S_4 = \left(-F + F\right) \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$$

$$(5) \Rightarrow \quad S_2 = -\frac{1}{2} F$$

$$(3) \Rightarrow \quad S_1 = -S_2 - S_3 - \frac{1}{\sqrt{5}} S_4 - \frac{1}{\sqrt{5}} S_5 - \frac{1}{3} S_6$$

$$= \frac{1}{2} F - \frac{1}{2} F + \frac{1}{2} F = \frac{1}{2} F$$