IEI–Mekanik, Linköpings universitet

Tentamen TEN1 i

TMME12, Mekanik I

20 december 2010, kl. 14.00–18.00

Lokal: U1, U3, U4, U6, U7, T2

Examinator: Peter Christensen

Jourhavande lärare: Peter Christensen, tel. 281188. Besöker salarna första gången ca 15.00.

Kurssekreterare: Anna Wahlund, tel. 281157, anna.wahlund@liu.se.

Antal uppgifter: 7 uppgifter på 1+4 sidor.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Betyg: 6 poäng av 15 möjliga krävs för godkänd tentamen. För betyg 4 och 5, krävs 9 respektive 12 poäng.

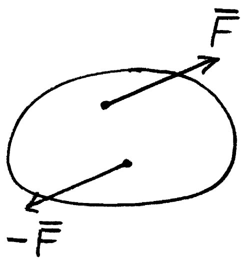
Lösningar: Lösningar läggs upp på kurshemsidan direkt efter tentamenstillfället.

Resultat: Resultat meddelas senast två veckor efter tentamenstillfället. Ingen visning; rättningsgranskning kan göras på studerandeexpeditionen belägen vid ingång A19c (öppettider: 10.00–11.30, 12.30–15.15). Eventuella klagomål ska framföras skriftligt.

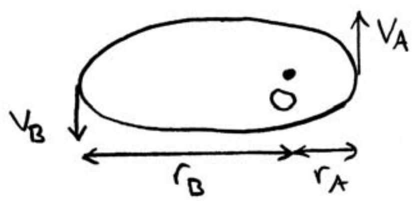
Instruktioner:

- Rita tydliga figurer och skriv med en lättläst piktur.
- Definiera införda storheter och motivera uppställda ekvationer.
- Om inte annat anges, får ekvationer på formelbladet användas utan bevis.
- Glöm inte att kontrollera svarens rimlighet.

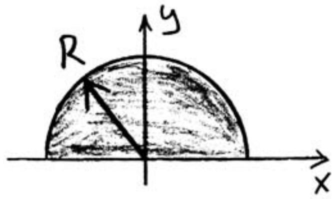
1. Visa att momentet av ett kraftpar är oberoende av valet av momentpunkt. (1p)



2. En masspunkt med massan m rör sig under inverkan av en centralkraft med kraftcentrum i $\mathcal{O}$. Visa att $v_{\mathcal{A}} r_{\mathcal{A}} = v_{\mathcal{B}} r_{\mathcal{B}}$. (1p)



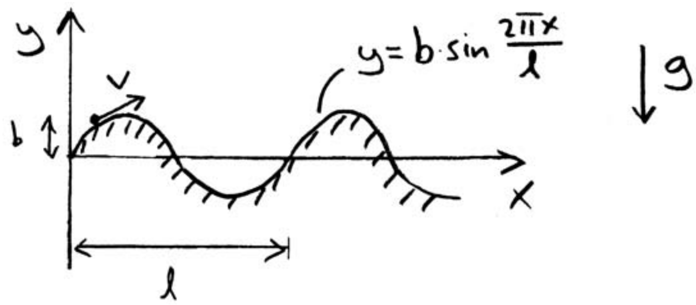
3. Bestäm läget av masscentrum för en halvcirkelskiva med radien R. (1p)



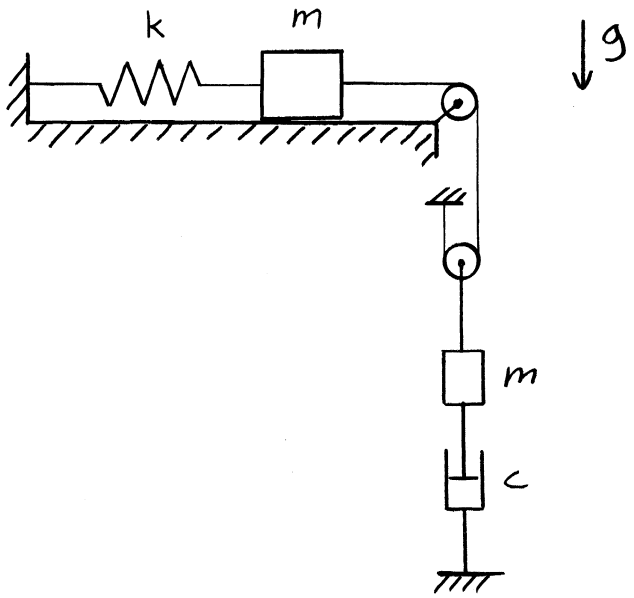
4. En masspunkt med massan m rör sig med konstant fart v längs ett underlag med formen

$$y = b \sin \frac{2\pi x}{l},$$

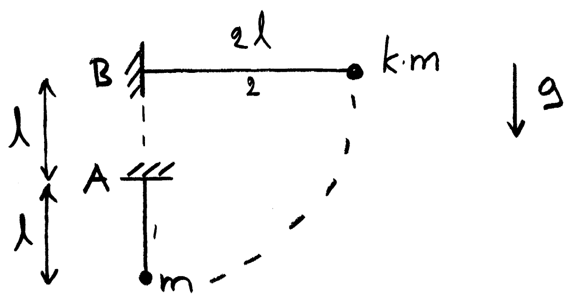
där $b > 0$ och $l > 0$ är konstanter. Bestäm storleken av kontaktkraften på masspunkten från underlaget i banans högsta respektive lägsta punkt. (3p)



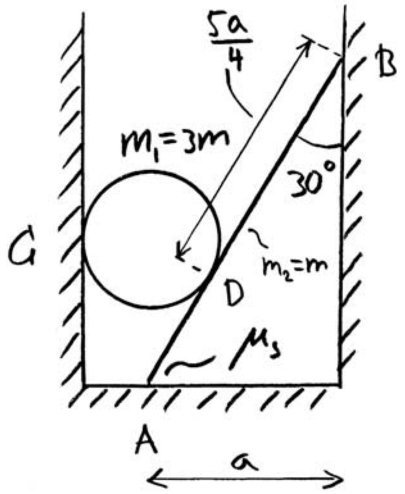
5. Bestäm svängningstiden τ_d för systemet i figuren. Det gäller att $c = \sqrt{20mk}$. Ingen friktion. (3p)



6. En masspunkt med massan m hänger stilla i ett snöre 1 med längden l fastsatt vid punkten $\mathcal{A}$. En annan masspunkt med massan km, där $k > 0$, är upphängd i ett snöre 2 med längden $2l$ fastsatt vid punkten $\mathcal{B}$. Från början hålls snöre 2 sträckt i horisontalläge varefter det släpps från vila. Masspunkterna stöter ihop med stöttalet e. Bestäm hur stort k måste vara för att masspunkten i snöre 1 ska nå upp till $\mathcal{B}$ efter stöten. (3p)

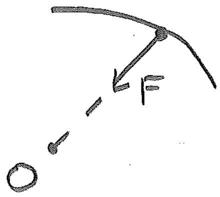


7. En cirkelskiva med massan $m_1 = 3m$ och en balk med massan $m_2 = m$ är placerade enligt figuren. Det statiska friktionstalet mellan balken och underlaget är μ_s. Vid övriga kontakter finns ingen friktion. Bestäm hur stort μ_s måste vara för att kropparna ska vara i jämvikt. (3p)



1, Se kompendiet

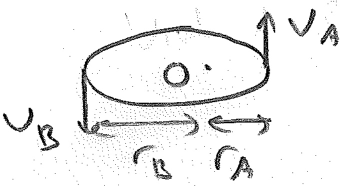
2)



$$\bar{M}_O = \bar{0}$$

$$O \text{ fix} \Rightarrow \bar{M}_O = \dot{\bar{h}}_O$$

$$\therefore \bar{h}_O = \bar{r} \times m\bar{v} \text{ konst}$$



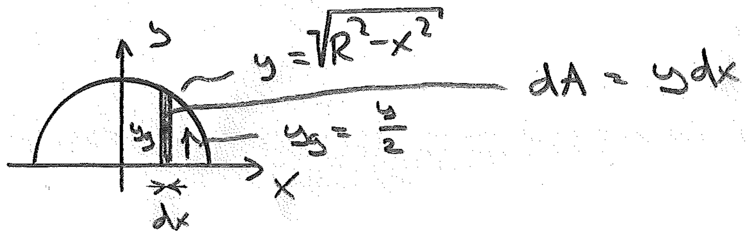
Vid A & B är $\bar{r} \perp \bar{v}$:

$$(h_O)_A = r_A v_A \cdot m$$

$$(h_O)_B = r_B v_B \cdot m$$

$$\therefore r_A v_A = r_B v_B$$

3/

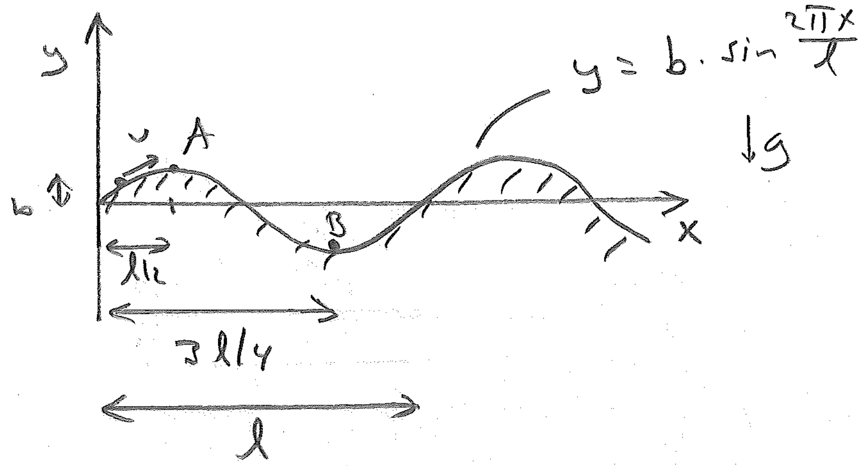


Symm $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x_G = 0}}$

$$y_G = \frac{\int y_g \, dA}{A} = \frac{\int_{-R}^{R} \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\,dx}{\pi R^2/2} =$$

$$= \frac{\left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R}}{\pi R^2} = \frac{\frac{4}{3}R^3}{\pi R^2} = \underline{\underline{\frac{4R}{3\pi}}}$$

4,

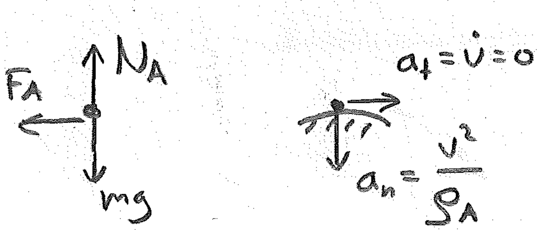


Givet: v konst

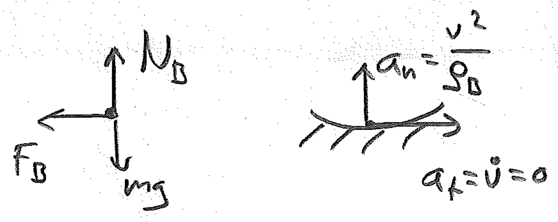
Sökt: $|\bar{F}_{kont}|$ vid A & B.

Frilägg

Vid A:



Vid B:



Newton II:

$\rightarrow: \quad -F_A = 0$ (Friktionskraften är alltså noll i detta läge; dock inte hela tiden från A till B, annars skulle farten variera)

$\downarrow: \quad mg - N_A = m\frac{v^2}{\rho_A}$

$\Leftrightarrow$

$N_A = mg - \frac{mv^2}{\rho_A} \geq 0$

$\therefore N_A = 0$ om $v^2 > \rho_A g$ (lättar)

$\rightarrow: \quad -F_B = 0$

$\uparrow: \quad N_B - mg = \frac{mv^2}{\rho_B}$

$\Leftrightarrow$

$N_B = mg + \frac{mv^2}{\rho_B}$

ρ?

$\bar{r} = x\hat{x} + y(x)\hat{y} = x\hat{x} + b \cdot \sin\frac{2\pi x}{\ell}\hat{y}$

$\frac{d\bar{r}}{dx} = \hat{x} + \frac{2\pi b}{\ell}\cos\frac{2\pi x}{\ell}\hat{y}$

$\frac{d^2\bar{r}}{dx^2} = -\frac{4\pi^2 b}{\ell^2}\sin\frac{2\pi x}{\ell}\hat{y}$

$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2\bar{r}}{dx^2} \times \frac{d\bar{r}}{dx}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dx}\right|^3}, \quad \rho = \frac{1}{\kappa}$

Vid A: $x = \frac{\ell}{4} \Rightarrow \frac{d\bar{r}}{dx} = \hat{x}, \quad \frac{d^2\bar{r}}{dx^2} = -\frac{4\pi^2 b}{\ell^2}\hat{y}$

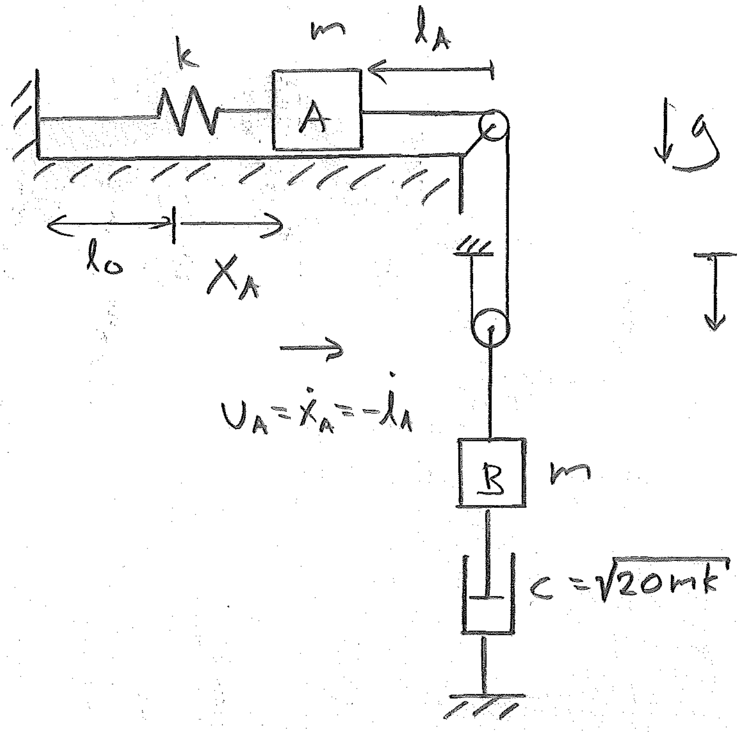
Vid B: $x = \frac{3\ell}{4} \Rightarrow \frac{d\bar{r}}{dx} = \hat{x}, \quad \frac{d^2\bar{r}}{dx^2} = \frac{4\pi^2 b}{\ell^2}\hat{y}$

$\therefore \rho_A = \rho_B = \frac{\ell^2}{4\pi^2 b}$

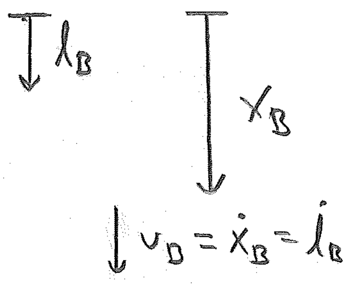
$\Rightarrow |\bar{F}_{kont,A}| = \begin{cases} mg - \frac{4\pi^2 mbv^2}{\ell^2}, & v^2 \leq \frac{\ell^2 g}{4\pi^2 b} \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$

$|\bar{F}_{kont,B}| = mg + 4\pi^2 mbv^2/\ell^2$

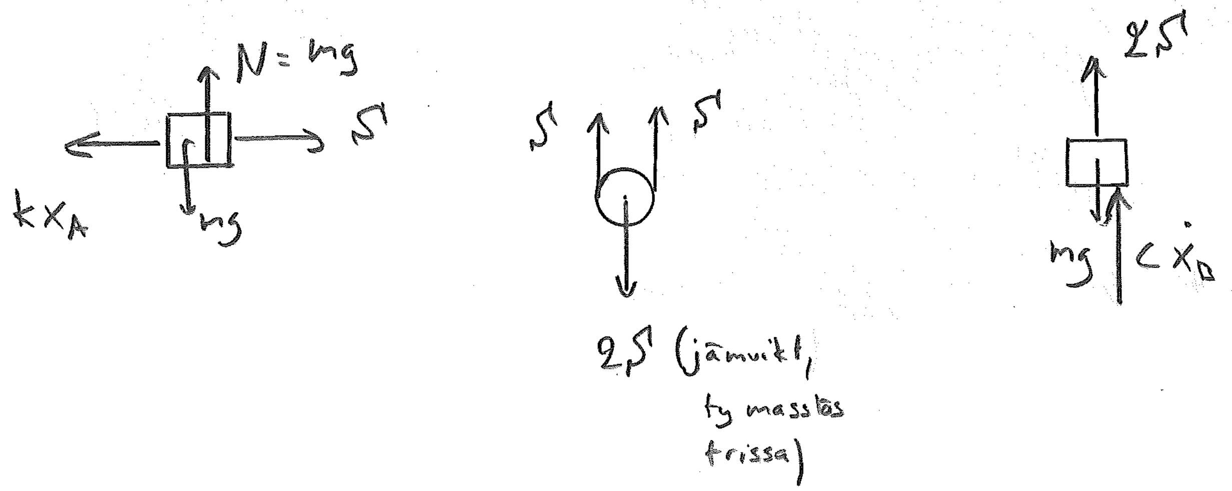
5)



Sökt: τ_d



Frilägg:



Newton II:

A: $\rightarrow$: $S - kx_A = m\ddot{x}_A$ (1)

B: $\downarrow$: $mg - 2S - c\dot{x}_B = m\ddot{x}_B$ (2)

Snörlängd, $l = l_A + 2l_B + \text{konst}$

l konst $\Rightarrow$ $\underbrace{\dot{l}_A}_{-\dot{x}_A} + 2\underbrace{\dot{l}_B}_{\dot{x}_B} = 0$

5 forts,

$$\therefore \quad \dot{x}_B = \frac{\dot{x}_A}{2} \qquad (3)$$

$$\ddot{x}_B = \frac{\ddot{x}_A}{2}$$

$$(1) \Rightarrow \quad S = k x_A + m \ddot{x}_A \qquad (4)$$

(3), (4) i (2) $\Rightarrow$

$$mg - 2kx_A - 2m\ddot{x}_A - c\frac{\dot{x}_A}{2} = m\frac{\ddot{x}_A}{2} \iff$$

$$\frac{5}{2} m\ddot{x}_A + \frac{c}{2}\dot{x}_A + 2kx_A = mg \iff$$

$$\ddot{x}_A + \underbrace{\frac{c}{5m}}_{2\zeta\omega_n}\dot{x}_A + \underbrace{\frac{4k}{5m}}_{\omega_n^2} x_A = \frac{2g}{5}$$

$$\zeta = \frac{c}{5m} \cdot \frac{1}{2\omega_n} = \frac{c}{5m} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5m}{4k}} =$$

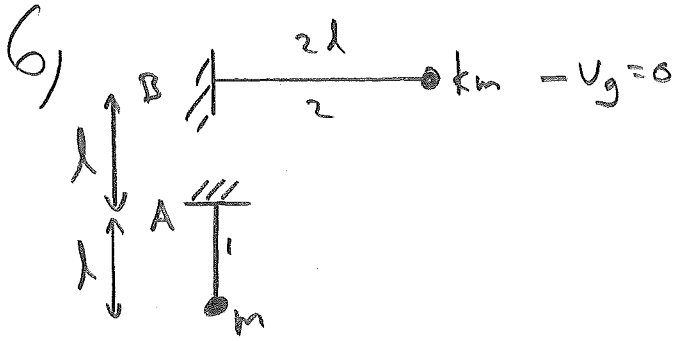
$$= \frac{\sqrt{20mk}}{5m} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5m}{4k}} = \frac{1}{2}$$

$\zeta < 1 \quad \therefore$ Underdämpat, så svänger det troligen.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{\frac{4k}{5m}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3k}{5m}}$$

$$\omega_d \tau_d = 2\pi \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_d = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{5m}{3k}}}}$$

6)



<u>Sökt</u>: k så når B

Når upp till B om snörkraften > 0.

<u>Fas 1</u> km faller sträckan $2l$

Arbete-energilagen:

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \underbrace{\Delta V_e}_{0}$$

Läge 1 (start)

$$T_1 = 0$$

$$V_{g_1} = 0$$

Läge 2 (precis före stöt)

$$T_2 = \frac{km}{2} v_{2f}^2$$

$$V_{g_2} = -km \cdot g \cdot 2l$$

$U = 0$ ty $\bar{S} \perp \bar{v}$

$$\therefore \quad 0 = \frac{km}{2} v_{2f}^2 - km\, g\, 2l \iff$$

$$v_{2f} = 2\sqrt{g l} \qquad (1)$$

6 forts,

Fas 2

Stöten

Precis före:

$\leftarrow v_{2f} = 2\sqrt{gl}$

$v_{1f} = 0$

Vid:

$\left(\bullet\!\leftarrow \;\; \rightarrow\!\bullet \right)$
$L^s \;\; L^s$

(Blir inga stötimpulser i snörena ty stöter ihop $\perp$ snörena)

Precis efter:

$v_{1e} \quad v_{2e}$

$\leftarrow\bullet \quad \leftarrow\bullet$

Stötimpulslagen $\left(\bar{L}^{s,ext} = \sum_{i=1}^{2} \bar{p}^{(i),e} - \sum_{i=1}^{2} \bar{p}^{(i),f} \right.$

$\left. \bar{p}^{(i)} = m_i \bar{v}_i \right)$:

$$\leftarrow : \; 0 = m \cdot v_{1e} + km\, v_{2e} - \left(0 + km\, 2\sqrt{gl}\right) \qquad (2)$$

Stöttalet e:

$$e = \frac{v_{2e} - v_{1e}}{v_{1f} - v_{2f}} = \frac{v_{2e} - v_{1e}}{-2\sqrt{gl}} \iff$$

$$v_{2e} = v_{1e} - 2e\sqrt{gl}$$

6 forts/ Ins i (2) $\Rightarrow$

$$0 = mv_{1e} + km\,v_{1e} - 2ekm\sqrt{gl} - 2km\sqrt{gl}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$v_{1e} = \frac{2(1+e)km\sqrt{gl}}{m(1+k)} \qquad (3)$$

Fas 3 m höjs sträckan $2l$

Läge 3 (precis efter stöt)

$$T_3 = \frac{m v_{1e}^2}{2}$$

$$V_{g3} = -mg \cdot 2l$$

Läge 4 (precis före når B):

$$T_4 = \frac{m v_{1B}^2}{2}$$

$$U_{g4} = 0$$

$$U = 0$$

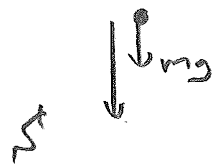
$$U = \Delta T + \Delta U_g \Rightarrow$$

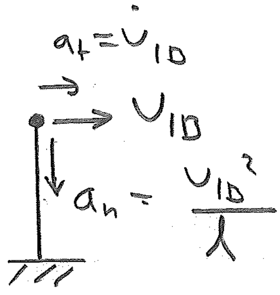
$$0 = \frac{m v_{1B}^2}{2} - \frac{m v_{1e}^2}{2} + mg2l = 0 \Leftrightarrow$$

$$v_{1B}^2 = v_{1e}^2 - 4gl \overset{(3)}{=} \frac{4(1+e)^2k^2 \cdot gl}{(1+k)^2} - 4gl$$

6 forts,

Frilägg vid B:





Newton II:

$$\downarrow: \quad S + mg = m\frac{v_{1D}^2}{\lambda} \quad \Leftrightarrow$$

$$S = -mg + \frac{4(1+e)^2k^2mg}{(1+k)^2} - 4mg =$$

$$= \left(\frac{4(1+e)^2k^2}{(1+k)^2} - 5\right)mg$$

$$S > 0 \quad \Leftrightarrow$$

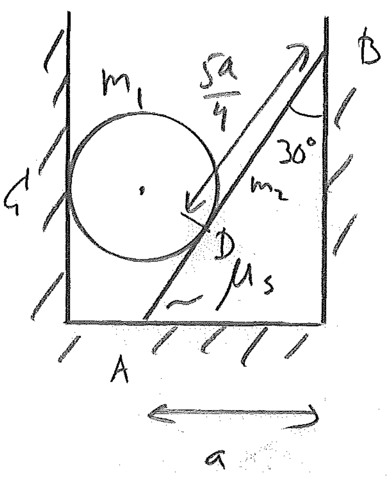
$$2(1+e)k > \sqrt{5}(1+k) \qquad (k>0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{k > \frac{\sqrt{5}}{2(1+e)-\sqrt{5}}}}$$

($\therefore$ $e > \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = 0.12$ krävs — annars nås ej B oberoende av hur stor k är)

7,

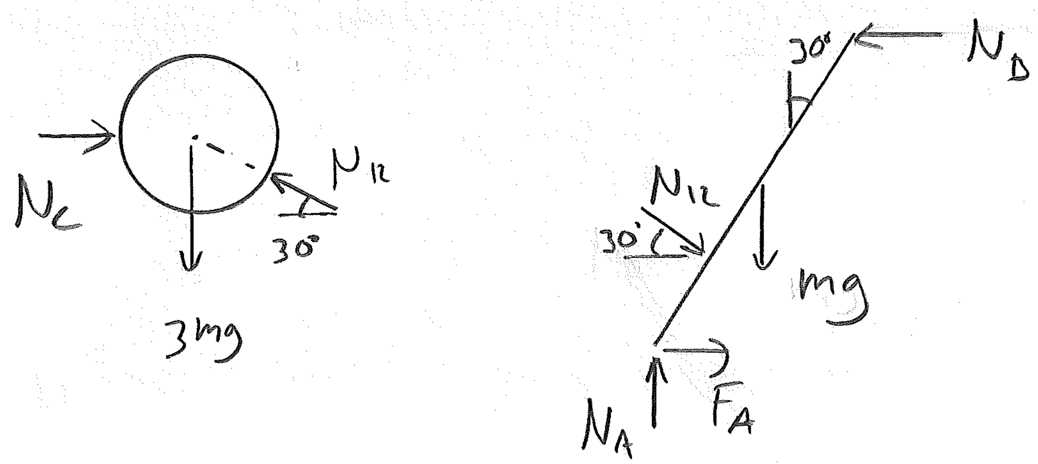


<u>Givet:</u> $m_1 = 3m$

$m_2 = m$

<u>Sökt:</u> μ_s för jämvikt

Frilägg:



<u>Jämvikt:</u>

m_1: $\uparrow$: $N_{12} \cdot \sin 30° - 3mg = 0 \Leftrightarrow$

$$N_{12} = 6mg \geq 0 \quad \text{ok}$$

$\rightarrow$: $N_C - N_{12} \cos 30° = 0 \Leftrightarrow$

$$N_C = \frac{6mg\sqrt{3}}{2} \geq 0 \quad \text{ok.}$$

7 forts,

m_2: $\uparrow$: $N_A - mg - N_{12} \cdot \sin 30^\circ = 0$

$\Leftrightarrow$

$\underline{N_A} = mg + 3mg = \underline{4mg} \geq 0$ ok

$\overset{\curvearrowright}{B}$: $N_A \cdot a - F_A \cdot \sqrt{3}a -$

$- N_{12} \cdot \frac{5a}{4} - mg \cdot \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\underline{F_A} = \frac{4mg - 6mg \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{2}mg}{\sqrt{3}} =$$

$$= \underline{-\frac{4}{\sqrt{3}} mg}$$

$\rightarrow$: $F_A + N_{12} \cdot \cos 30^\circ - N_B = 0 \Leftrightarrow$

$N_B = -\frac{4}{\sqrt{3}} mg + 6mg \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$ ok.

Vid jämvikt: $|F_A| \leq \mu_s N_A \Leftrightarrow$

$\frac{4}{\sqrt{3}} mg \leq \mu_s \cdot 4mg \Leftrightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{1}{\sqrt{3}}}}$