
TENTAMEN TEN1 I

TMME12, Mekanik I

20 DECEMBER 2010, KL. 14.00–18.00

LOKAL: U1, U3, U4, U6, U7, T2

EXAMINATOR: Peter Christensen

JOURHAVANDE LÄRARE: Peter Christensen, tel. 281188. Besöker salarna första gången ca 15.00.

KURSSEKRETERARE: Anna Wahlund, tel. 281157, anna.wahlund@liu.se.

ANTAL UPPGIFTER: 7 uppgifter på 1+4 sidor.

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL: Inga.

BETYG: 6 poäng av 15 möjliga krävs för godkänd tentamen. För betyg 4 och 5, krävs 9 respektive 12 poäng.

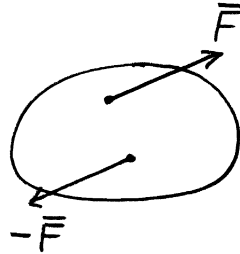
LÖSNINGAR: Lösningar läggs upp på kurshemsidan direkt efter tentamenstillfället.

RESULTAT: Resultat meddelas senast två veckor efter tentamenstillfället. Ingen visning; rättningsgranskning kan göras på studerandeexpeditionen belägen vid ingång A19c (öppettider: 10.00–11.30, 12.30–15.15). Eventuella klagomål ska framföras skriftligt.

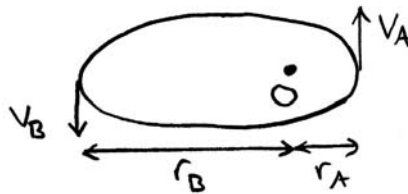
INSTRUKTIONER:

- Rita tydliga figurer och skriv med en lättläst piktur.
- Definiera införda storheter och motivera uppställda ekvationer.
- Om inte annat anges, får ekvationer på formelbladet användas utan bevis.
- Glöm inte att kontrollera svarens rimlighet.

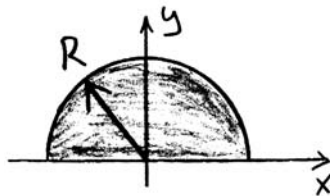
-
1. Visa att momentet av ett kraftpar är oberoende av valet av momentpunkt. (1p)



2. En masspunkt med massan m rör sig under inverkan av en centralkraft med kraftcentrum i O . Visa att $v_A r_A = v_B r_B$. (1p)



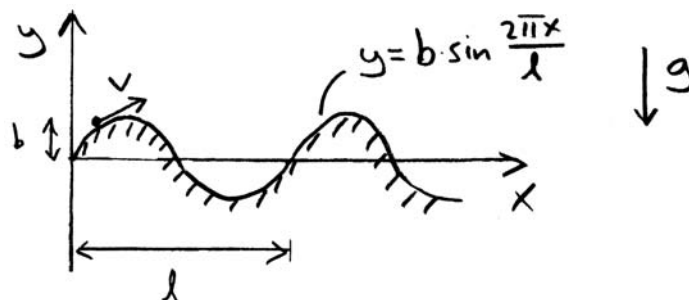
3. Bestäm läget av masscentrum för en halvcirkelskiva med radien R . (1p)



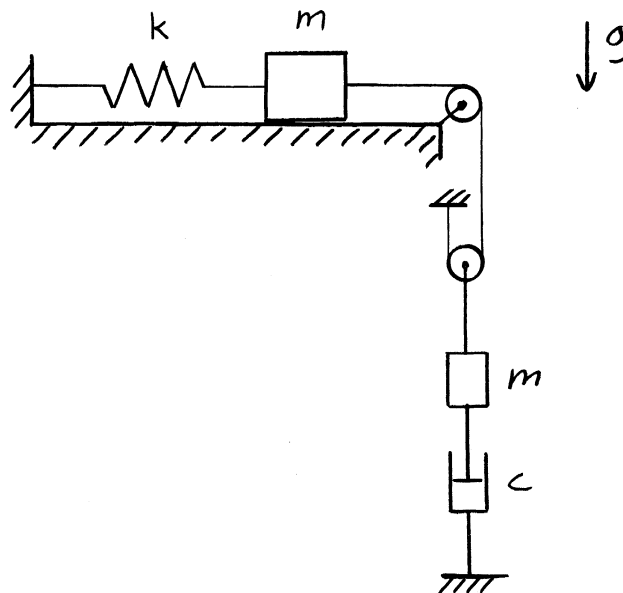
4. En masspunkt med massan m rör sig med konstant fart v längs ett underlag med formen

$$y = b \sin \frac{2\pi x}{l},$$

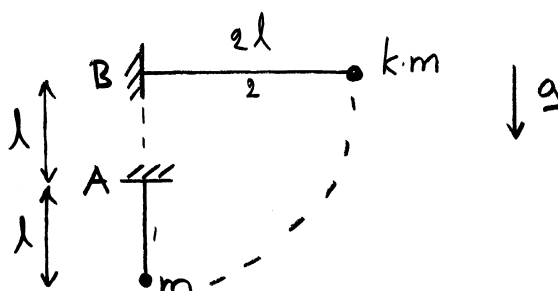
där $b > 0$ och $l > 0$ är konstanter. Bestäm storleken av kontaktkraften på masspunkten från underlaget i banans högsta respektive lägsta punkt. (3p)



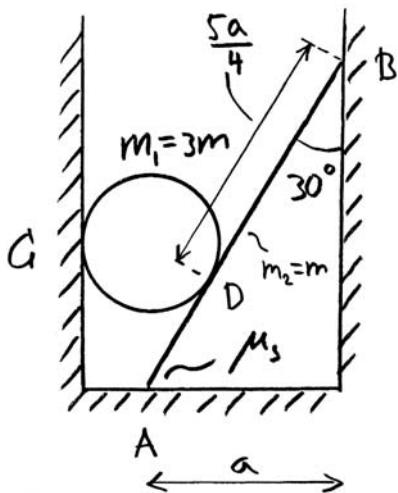
5. Bestäm svängningstiden τ_d för systemet i figuren. Det gäller att $c = \sqrt{20mk}$. Ingen friktion. (3p)



6. En masspunkt med massan m hänger stilla i ett snöre 1 med längden l fastsatt vid punkten \mathcal{A} . En annan masspunkt med massan km , där $k > 0$, är upphängd i ett snöre 2 med längden $2l$ fastsatt vid punkten \mathcal{B} . Från början hålls snöre 2 sträckt i horisontalläge varefter det släpps från vila. Masspunkterna stöter ihop med stöttalet e . Bestäm hur stort k måste vara för att masspunkten i snöre 1 ska nå upp till \mathcal{B} efter stöten. (3p)

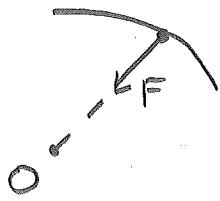


-
7. En cirkelskiva med massan $m_1 = 3m$ och en balk med massan $m_2 = m$ är placerade enligt figuren. Det statiska friktionstalet mellan balken och underlaget är μ_s . Vid övriga kontakter finns ingen friktion. Bestäm hur stort μ_s måste vara för att kropparna ska vara i jämvikt. (3p)

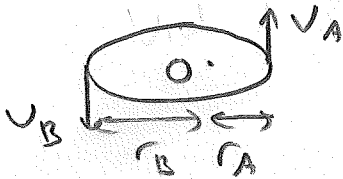


1, Se kompendiet

2)



$$\begin{aligned}\bar{M}_O &= \bar{0} \\ \text{O fix} &\Rightarrow \bar{M}_O = \dot{\bar{h}}_O \\ \therefore \bar{h}_O &= \bar{r} \times m\bar{v} \text{ konst}\end{aligned}$$



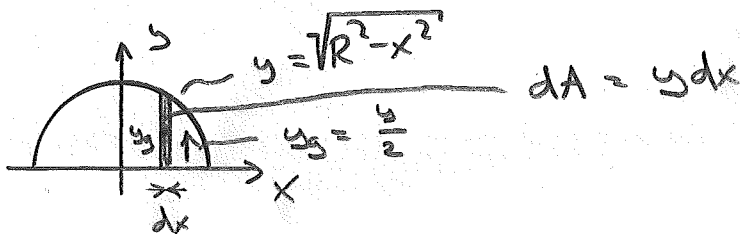
vid A & B $\bar{a} \perp \bar{r} \perp \bar{v}$:

$$(h_O)_A = r_A v_A \cdot m$$

$$(h_O)_B = r_B v_B \cdot m$$

$$\therefore r_A v_A = r_B v_B$$

3,

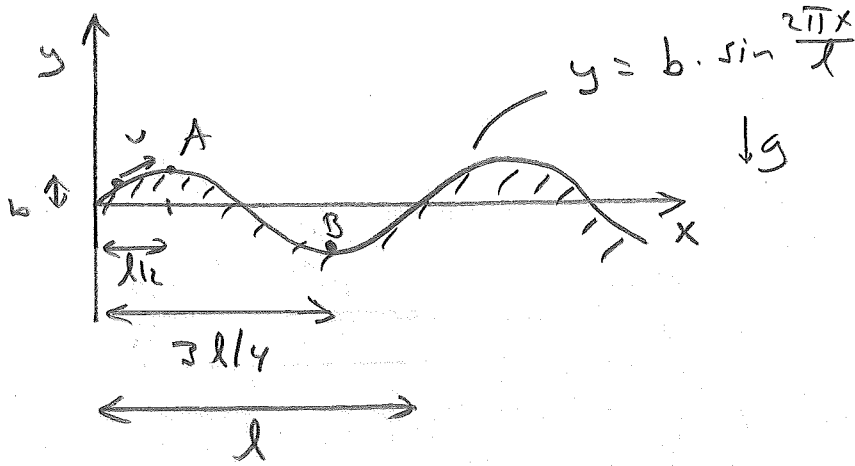


$$\text{Symm} \Rightarrow \underline{\underline{x_G = 0}}$$

$$y_G = \frac{\int y_G dA}{A} = \frac{\int_{-R}^R \frac{1}{2} (R^2 - x^2) dx}{\pi R^2 / 2} =$$

$$= \frac{[R^2 x - \frac{1}{3} x^3]_{-R}^R}{\pi R^2} = \frac{\frac{4}{3} R^3}{\pi R^2} = \underline{\underline{\frac{4R}{3\pi}}}$$

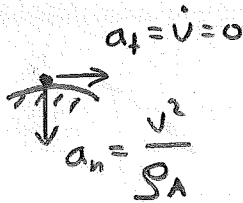
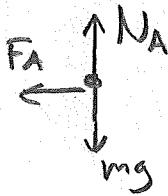
41



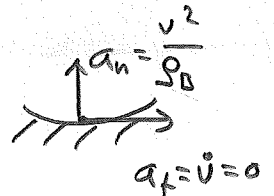
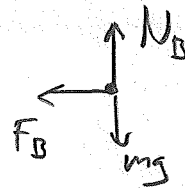
Givet: v konst
 Satt: $|\vec{F}_{kont}|$ vid
 A & B.

Fritagga

Vid A:



Vid B:



Newton II:

→ : $-F_A = 0$ (Friktnskraften är alltså noll i detta läge; dock inte hela tiden från A till B, annars skulle farten variera)

↓ : $mg - N_A = m \frac{v^2}{\rho_A}$

⇔

$N_A = mg - \frac{mv^2}{\rho_A} \geq 0$

→ : $-F_B = 0$

↑ : $N_B - mg = \frac{mv^2}{\rho_B}$

⇔

$N_B = mg + \frac{mv^2}{\rho_B}$

∴ $N_A = 0$ om $v^2 > \rho_A g$ (lättar)

g?

$\vec{r} = x \hat{x} + y(x) \hat{y} = x \hat{x} + b \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \hat{y}$

$\rho = \frac{\left| \frac{d^2 \vec{r}}{dx^2} \times \frac{d\vec{r}}{dx} \right|}{\left| \frac{d\vec{r}}{dx} \right|^3}$

$\rho = \frac{1}{\lambda}$

Vid A: $x = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dx} = \hat{x}, \frac{d^2 \vec{r}}{dx^2} = -\frac{4\pi^2 b}{\lambda^2} \hat{y}$

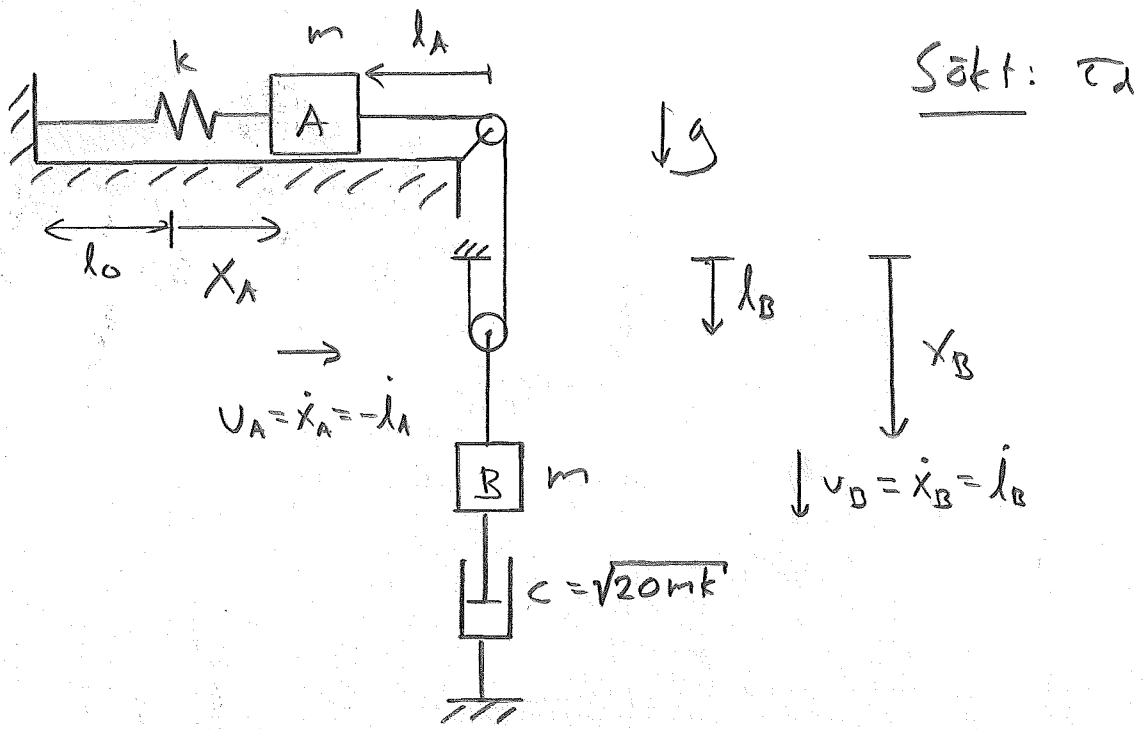
Vid B: $x = \frac{3\lambda}{4} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dx} = \hat{x}, \frac{d^2 \vec{r}}{dx^2} = \frac{4\pi^2 b}{\lambda^2} \hat{y}$

∴ $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{\lambda^2}$

⇒ $|\vec{F}_{kont,A}| = \begin{cases} mg - \frac{4\pi^2 m b v^2}{\lambda^2}, & v \leq \frac{\lambda g}{4\pi^2 b} \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$

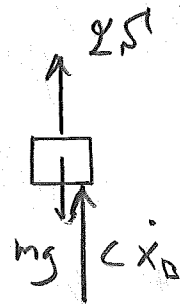
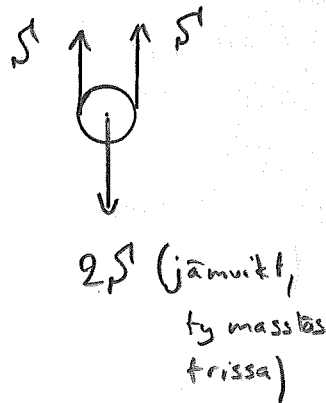
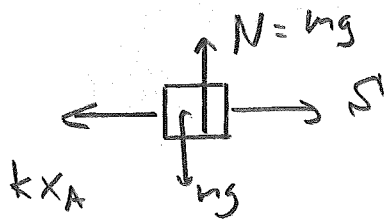
$|\vec{F}_{kont,B}| = mg + \frac{4\pi^2 m b v^2}{\lambda^2}$

5/



Sökt: τ_A

Fritlägg:



Newton II:

$$A: \rightarrow : \tau - kx_A = m\ddot{x}_A \quad (1)$$

$$B: \downarrow : mg - 2\tau - c\dot{x}_B = m\ddot{x}_B \quad (2)$$

Snörlängd, $l = l_A + 2l_B + \text{konst}$

$$l \text{ konst} \Rightarrow \underbrace{\dot{l}_A}_{-\dot{x}_A} + 2\underbrace{\dot{l}_B}_{\dot{x}_B} = 0$$

5 fortsy

$$\therefore \dot{X}_B = \frac{\dot{X}_A}{2} \quad (3)$$

$$\ddot{X}_B = \frac{\ddot{X}_A}{2}$$

$$(1) \Rightarrow F = kX_A + m\ddot{X}_A \quad (4)$$

(3), (4) i (2) \Rightarrow

$$mg - 2kX_A - 2m\ddot{X}_A - c\frac{\dot{X}_A}{2} = m\frac{\ddot{X}_A}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{2}m\ddot{X}_A + \frac{c}{2}\dot{X}_A + 2kX_A = mg \Leftrightarrow$$

$$\ddot{X}_A + \underbrace{\frac{c}{5m}}_{2\zeta\omega_n}\dot{X}_A + \underbrace{\frac{4k}{5m}}_{\omega_n^2}X_A = \frac{2g}{5}$$

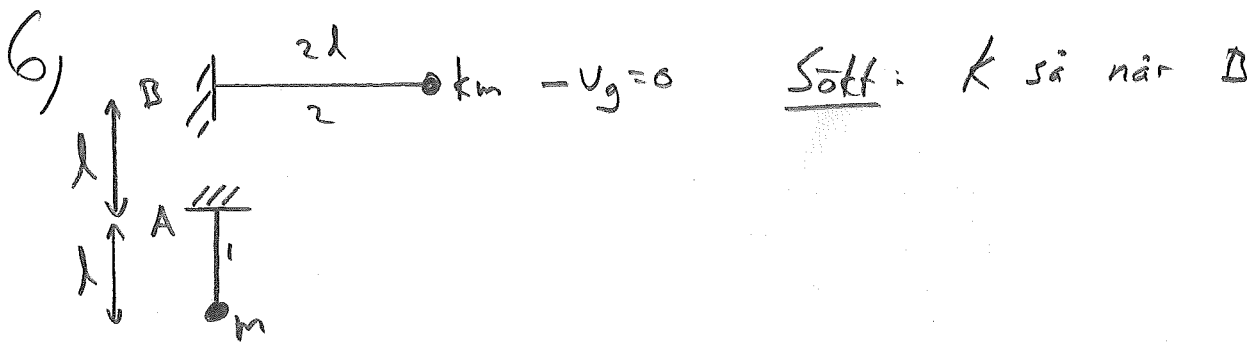
$$\zeta = \frac{c}{5m} \cdot \frac{1}{2\omega_n} = \frac{c}{5m} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5m}{4k}} =$$

$$= \frac{\sqrt{20mk}}{5m} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5m}{4k}} = \frac{1}{2}$$

$\zeta < 1 \therefore$ Undedämpat, så svänger utligen.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{4k}{5m}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3k}{5m}}$$

$$\omega_d \tau_d = 2\pi \Rightarrow \tau_d = \underline{\underline{2\pi \sqrt{\frac{5m}{3k}}}}$$



När upp till B om snärkraften > 0 .



Fas 1 km faller sträckan $2l$

Arbete-energilagen:

$$W = \Delta T + \Delta U_g + \Delta U_e$$

Läge 1 (start)

$$T_1 = 0$$

$$U_{g1} = 0$$

$$W = 0 \quad \text{ty} \quad \vec{s} \perp \vec{v}$$

Läge 2 (precis för stöt)

$$T_2 = \frac{km}{2} v_{2f}^2$$

$$U_{g2} = -km \cdot g \cdot 2l$$



$$\therefore 0 = \frac{km}{2} v_{2f}^2 - km g 2l \quad (\Leftrightarrow)$$

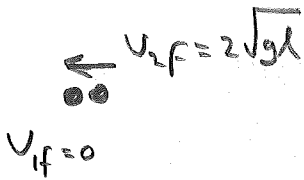
$$v_{2f} = 2\sqrt{gl} \quad (1)$$

6 forts,

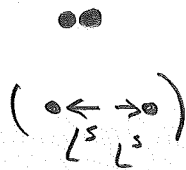
Fas 2

Stöten

Precis före:



Vid:



Precis efter:



(Bli inga stötpulsar
i snörena ty stötar
ihop \perp snörena)

Stötimpulslagen

$$\left(\bar{L}_{s, ext} = \sum_{i=1}^2 \bar{p}^{(i), e} - \sum_{i=1}^2 \bar{p}^{(i), f} \right.$$

$$\left. \bar{p}^{(i)} = m_i \bar{v}_i \right):$$

$$\leftarrow : 0 = m v_{1e} + km v_{2e} - (0 + km 2\sqrt{gl})$$

(2)

Stöffalet e :

$$e = \frac{v_{2e} - v_{1e}}{v_{1f} - v_{2f}} = \frac{v_{2e} - v_{1e}}{-2\sqrt{gl}} \Leftrightarrow$$

$$v_{2e} = v_{1e} - 2e\sqrt{gl}$$

6 forts, (ns i (2) \Rightarrow)

$$0 = mv_{1e} + kmv_{1e} - 2ekt\sqrt{gl} - 2kt\sqrt{gl}$$

\Leftrightarrow

$$v_{1e} = \frac{2(1+e)kt\sqrt{gl}}{m(1+k)} \quad (3)$$

Fas 3 m höjs sträcktän $2l$

Läge 3 (precis efter stöt)

$$T_3 = \frac{mv_{1e}^2}{2}$$

$$V_{g3} = -mg \cdot 2l$$

$$U = 0$$

$$U = \Delta T + \Delta U_g \Rightarrow$$

$$0 = \frac{mv_{1B}^2}{2} - \frac{mv_{1e}^2}{2} + mg \cdot 2l = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$v_{1B}^2 = v_{1e}^2 - 4gl \stackrel{(3)}{=} \frac{4(1+e)^2 k^2 \cdot gl}{(1+k)^2} - 4gl$$

Läge 4 (precis före när B):

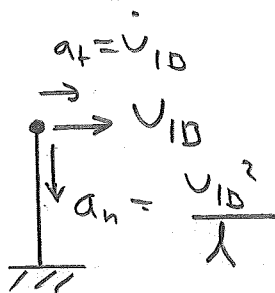
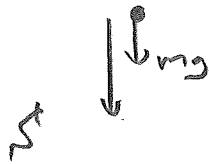
$$T_4 = \frac{mv_{1B}^2}{2}$$

$$U_{g4} = 0$$

6 forts

Fritagg

vid B:



Newton II:

$$\downarrow: T + mg = m \frac{v_B^2}{r} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$T = -mg + \frac{4(1+e)^2 k^2 mg}{(1+k)^2} - 4mg =$$

$$= \left(\frac{4(1+e)^2 k^2}{(1+k)^2} - 5 \right) mg$$

$$T > 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

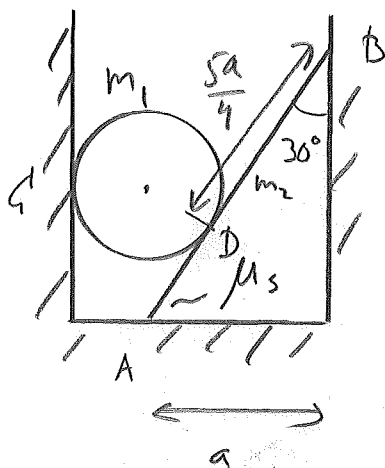
$$2(1+e)k > \sqrt{5}(1+k) \quad (k > 0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{k > \frac{\sqrt{5}}{2(1+e) - \sqrt{5}}}}$$

($\because e > \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 =$
0.12 krävs
annars
här ej
Beträande
av hur stor k är)

7.1

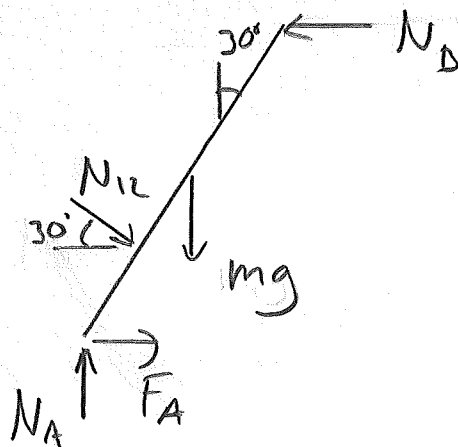
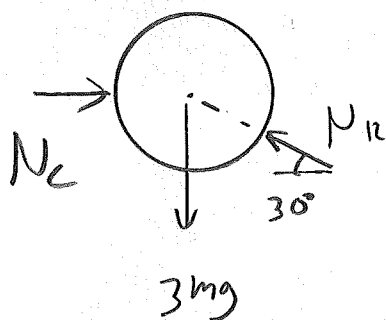


Givet: $m_1 = 3m$

$m_2 = m$

Sök: μ_s för jämvikt

Frilägg:



Jämvikt:

$m_1: \uparrow: N_{12} \cdot \sin 30^\circ - 3mg = 0 \Leftrightarrow$

$N_{12} = 6mg \geq 0 \text{ ok}$

$\rightarrow: N_c - N_{12} \cdot \cos 30^\circ = 0 \Leftrightarrow$

$N_c = \frac{6mg\sqrt{3}}{2} \geq 0 \text{ ok}$

7 forts,

$$m_2: \uparrow: N_A - mg - N_{12} \cdot \sin 30^\circ = 0$$

\Leftrightarrow

$$\underline{N_A} = mg + 3mg = \underline{4mg} \geq 0 \text{ ok}$$

$$\vec{B}: N_A \cdot a - F_A \cdot \sqrt{3}a -$$

$$- N_{12} \cdot \frac{5a}{4} - mg \cdot \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underline{F_A} = \frac{4mg - 6mg \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{2}mg}{\sqrt{3}} =$$

$$= \underline{-\frac{4}{\sqrt{3}}mg}$$

$$\rightarrow: F_A + N_{12} \cdot \cos 30^\circ - N_B = 0 \Leftrightarrow$$

$$N_B = -\frac{4}{\sqrt{3}}mg + 6mg \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0 \text{ ok.}$$

$$\text{Ud jämvikt: } |F_A| \leq \mu_s N_A \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}}mg \leq \mu_s \cdot 4mg \Leftrightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{1}{\sqrt{3}}}}$$