

Tentamen i Mekanik del 1 för Y

TMME12

2010-04-07, kl 14-18

Tentamenskod: TEN1

Tentsal: TER1, TER2

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00 och 17.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-
tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till
Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

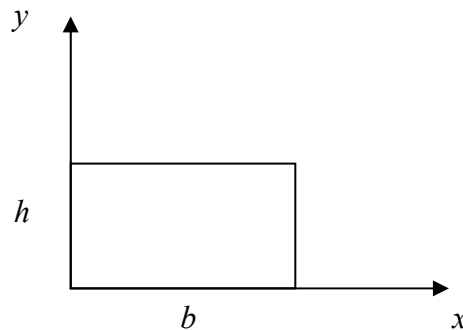
Teoridel:

1a)

Masscentrum för en kropp definieras som bekant som

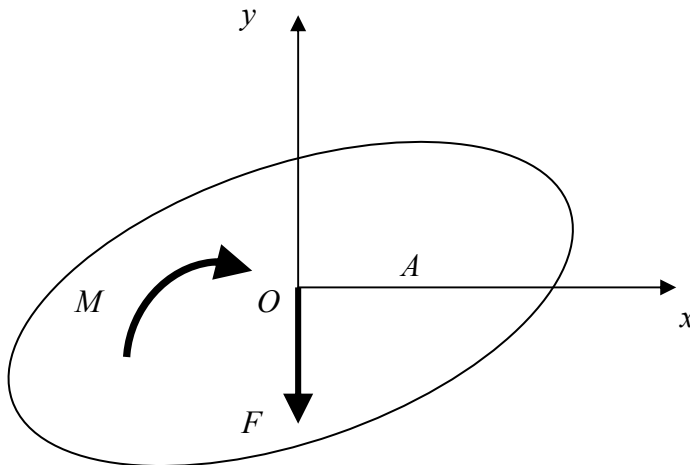
$$\mathbf{r}_G = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho dV}{\int_V \rho dV}, \text{ där } \rho = \text{densiteten}$$

Visa att masscentrum för en tunn homogen rektangulär skiva utgörs av punkten $(b/2, h/2)$. (1p)



1b)

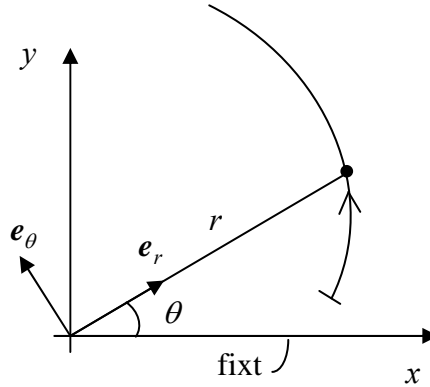
Givet en kraftvektor $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_y$ angripande i punkten O (origo) och ett kraftparsmoment $\mathbf{M} = -M\mathbf{e}_z$ där storleken är $M = Fa$. Visa att kraftsystemet kan reduceras till enbart en kraft angripande i punkten A med xy koordinaterna $(a, 0)$. (1p)



Tentamen i Mekanik del 1 för Y 2010-04-07

2a)

En partikels bana i polära koordinater ges av $r = r(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där t är tiden, se figur.



Sambandet mellan de polära riktningarna e_r , e_θ och de fixa kartesiska riktningarna e_x , e_y lyder som bekant

$$\begin{aligned} e_r &= \cos \theta e_x + \sin \theta e_y \\ e_\theta &= -\sin \theta e_x + \cos \theta e_y \end{aligned}$$

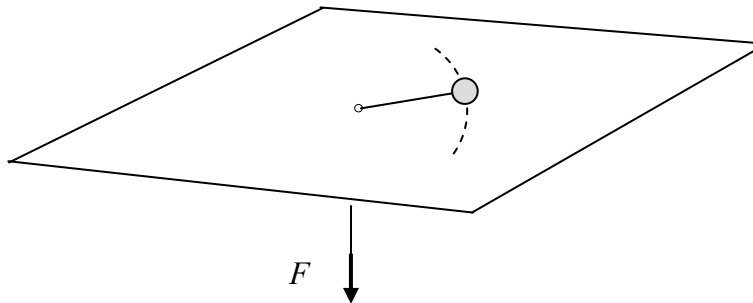
Visa att partikelns hastighet v i polära koordinater kan skrivas

$$v = \dot{r} e_r + r\dot{\theta} e_\theta \tag{1p}$$

2b)

En liten kula är tvingad att röra sig i ett horisontellt plan. Kulan är fäst i ett snöre som i sin tur löper igenom ett litet hål i planet. Snöret hålls sträckt med en kraft F under planet. Kulan rör sig i en cirkelbana runt hålet med radien r_1 och snöret har då vinkelhastigheten ω_1 . Om banan ändras till en ny cirkelbana med radien r_2 , visa att snörets vinkelhastighet

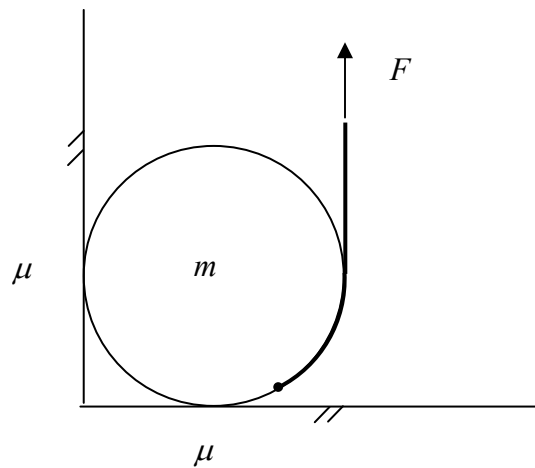
då blir $\omega_2 = \omega_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$. All friktion kan försummas i analysen. (1p)



Problemdel:

3)

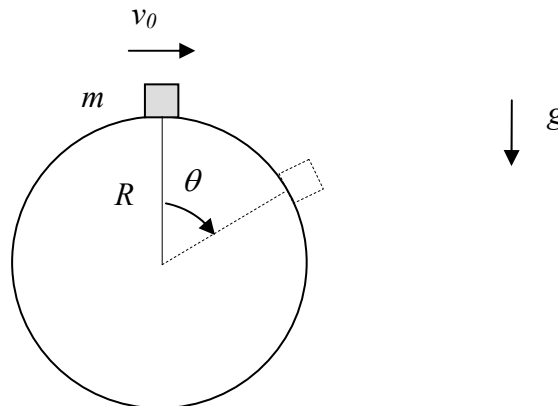
En homogen cirkulär skiva har massan m och radien R . Ett snöre är fäst i skivans periferi och skivan vilar mot en vertikal vägg och ett horisontellt underlag enligt figur. Linan hålls spänd med en vertikal kraft F . Den statiska friktionskoefficienten är μ mellan både skivan och väggen och mellan skivan och underlaget. Hur stor kan kraften F maximalt vara utan att glidning uppstår. (2p)



4)

En partikel med massan m startar med hastigheten v_0 på toppen av en fix cirkulär cylinder. Cylinder har radien R och friktionen mellan partikeln och cylindern kan försummas.

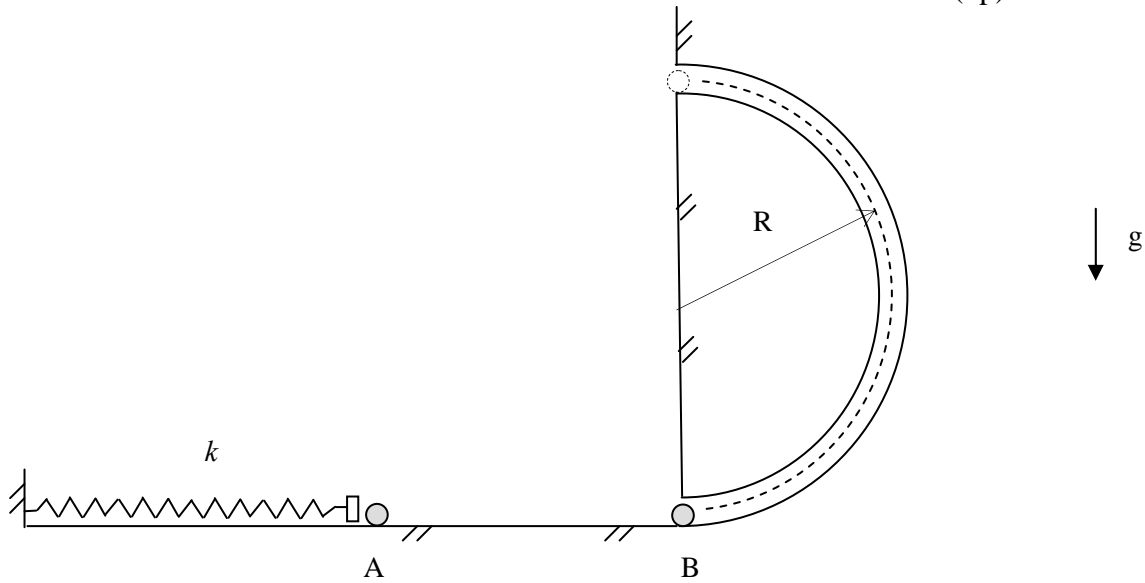
- Beräkna normalkraften från cylindern på partikeln som funktion av vinkeln θ (2p)
- Bestäm vinkeln då partikeln tappat kontakten med cylindern (1p)



5)

En partikel A med massan m är intryckt i en fjäder och hålles i jämvikt varvid fjäderkraften blir $3mg$. Styvheten hos fjädern (fjäderkonstanten) är $k = mg/R$. Partikeln släpps från vila i det intryckta läget och kolliderar senare med en partikel B som även den har massan m . Efter kollisionen åker partikel B i ett cirkulärt spår vars radie är R , se figur. Bestäm för vilka stöttal som partikel B når den högsta punkten i detta spår. Förlusterna vid kollisionen antas vara de enda energiförlusterna i systemet.

(3p)

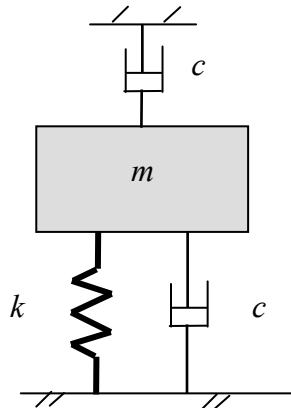


6)

Ett dämpsystem består av en fjäder med fjäderkonstanten k och två dämpare med dämpkonstanten $c = \sqrt{km}$ vardera. Massan m släpps från vila vid tiden $t = 0$ då fjädern är ospänd.

a) Bestäm kraften i fjädern som funktion av tiden (2p)

b) Beräkna massans maximala hastighet under rörelsen (1p)



Lösningar Mekanik V del 1, TMME12

2010-04-07

$$1a) \quad \bar{r}_G = \frac{1}{m} \int_V \bar{r} \rho dV$$

$$\rho dV = \rho \cdot t dx dy \quad ; \quad m = \int \rho t dx dy = \rho t b h$$

$$x_G = \frac{1}{\rho t b h} \int_A x dx dy = \frac{1}{b h} \int_0^h \left[\int_0^b x dx \right] dy =$$

$$= \frac{1}{b h} \int_0^h \frac{b^2}{2} dy = \frac{1}{b h} \frac{b^2}{2} h = \underline{\underline{\frac{b}{2}}}$$

p.s.s fas $\underline{\underline{y_G = \frac{h}{2}}}$ v.s.v

1b) Reducera till A $\bar{R} = \bar{F} = -F \bar{e}_y$

$$\bar{M}^A = \bar{A} \times \bar{F} + \bar{M} = \bar{0}$$

Således enbart en kraft $\bar{R} = -F \bar{e}_y$

2a) $\bar{r} = r \bar{e}_r \quad ; \quad \bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\bar{e}}_r$

$$\dot{\bar{e}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \bar{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \bar{e}_y = \dot{\theta} \bar{e}_\theta$$

$$\underline{\underline{\bar{v} = \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\theta} \bar{e}_\theta \quad \text{v.s.v}}}$$

2b) $\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{0} \quad ; \quad \bar{M}_O = \dot{\bar{h}}_O$

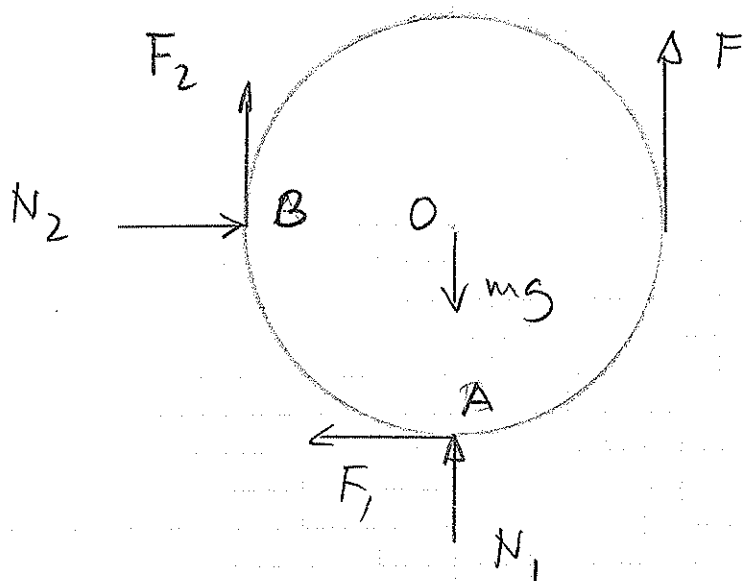
ger $\bar{h}_O = \bar{r} \times m \bar{v}$ är konst.

$$\bar{h}_{O_1} = \bar{h}_{O_2} \quad ; \quad r_1 \bar{e}_r \times m r_1 \dot{\theta}_1 \bar{e}_\theta = r_2 \bar{e}_r \times m r_2 \dot{\theta}_2 \bar{e}_\theta$$

ger $r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2 \quad ; \quad \omega_2 = \omega_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

3) Friåass

$$\sum \vec{F} = \vec{0}, \quad \sum \vec{M} = \vec{0}$$



ger

$$\rightarrow N_2 - F_1 = 0$$

$$\uparrow F + F_2 + N_1 - mg = 0$$

$$\odot FR - F_1 R - F_2 R = 0$$

Vid gränsvärdet för glidning gäller vid A & B

$$|F_1| = \mu |N_1|; \quad |F_2| = \mu |N_2|$$

där $N_1 > 0, N_2 > 0$

Detta ger

$$\begin{cases} N_2 - \mu N_1 = 0 \\ F + \mu N_2 + N_1 - mg = 0 \\ F - \mu N_1 - \mu N_2 = 0 \end{cases} \quad \text{dvs}$$

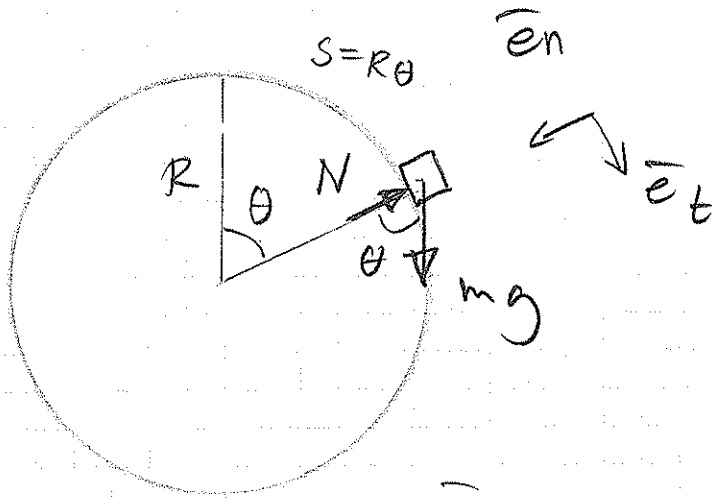
$$F = F_{\max} = \frac{mg}{1 + \frac{1+\mu^2}{\mu(1+\mu)}}$$

4) Fritass

Kinematik

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R} = R\dot{\theta}^2$$

$$a_t = \dot{v} = \dot{\dot{s}} = R\ddot{\theta}$$



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{gär} \quad \begin{matrix} \vec{e}_n \\ \swarrow \\ -N + mg \cos \theta = mR\dot{\theta}^2 \end{matrix} \quad (1)$$

$$\begin{matrix} \vec{e}_t \\ \searrow \\ mg \sin \theta = mR\ddot{\theta} \end{matrix} \quad (2)$$

Bestäm $\ddot{\theta}(\theta)$ mha (2)

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta ; \quad \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$\ddot{\theta} d\theta = \dot{\theta} d\dot{\theta} ; \quad \int \frac{g}{R} \sin \theta d\theta = \int \dot{\theta} d\dot{\theta}$$

$$-\frac{g}{R} \cos \theta = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + C ; \quad \text{B.V. } \theta = 0 ; \quad \dot{\theta} = \frac{V_0}{R}$$

$$\text{ger } C = -\frac{g}{R} - \frac{V_0^2}{2R^2} \quad \text{och}$$

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{R} \cos \theta + \frac{2g}{R} + \frac{V_0^2}{R^2} \quad \text{ins. i (1)}$$

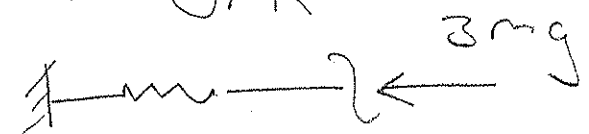
$$a) \quad \underline{\underline{N(\theta) = mg(3 \cos \theta - 2) - \frac{mV_0^2}{R}}}$$

$$b) \quad N=0 \quad \text{fås} \quad d\vec{a}$$

$$\underline{\underline{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)}} \quad \text{om} \quad v_0^2 \leq gR$$

$$(\quad \theta = 0 \quad \text{om} \quad v_0^2 > gR \quad)$$

5) $k = mg/R$



$\Rightarrow \delta = 3R$

Hastighet före stöt v_f :

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} k \delta^2 \Rightarrow v_f^2 = \frac{g}{L} 9R^2 = 9gR \quad (1)$$

Hastighet efter stöt v_e för toppen:

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = mg 2R \Rightarrow v_e^2 = 4gR \quad (2)$$

Stöttal

$$e = \frac{v_e - v}{v_f} \quad (3)$$

Rörelsemängd

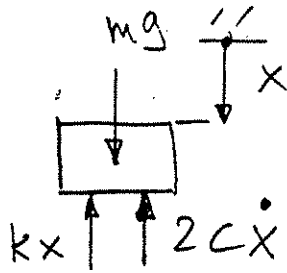
$$m v_f = m v_e + m v \quad (4)$$

(4) \circ (3):

$$e = \frac{2v_e - v_f}{v_f} = \frac{(1) = (2)}{1} = \frac{1}{3} \quad \left\| \begin{array}{l} \frac{1}{3} \leq e \leq 1 \\ \text{ger toppen} \end{array} \right.$$

6)

Frilägg (x=0, fjädern ospänd)



$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \quad \downarrow \quad mg - kx - 2c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

Identificera: $2\zeta\omega_n = \frac{2c}{m}$, $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$

$$\Rightarrow \zeta = 1 \quad \circ \circ \quad x = (At + B)e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{k}$$

$$B, \forall t=0 \quad x=0 \Rightarrow B = -mg/k$$

$$\dot{x}=0 \Rightarrow A = B\omega_n = -\frac{mg}{k}\omega_n$$

$$\Rightarrow x = -\frac{mg}{k}(\omega_n t + 1)e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = gte^{-\omega_n t} \quad \text{max da } \ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\omega_n} \Rightarrow \dot{x}_{\max} = g \frac{1}{\omega_n} e^{-1}$$

Svar: $F = kx = mg(1 - (\omega_n t + 1)e^{-\omega_n t})$

$$\dot{x}_{\max} = g \frac{1}{\omega_n} e^{-1} \quad \text{där } \omega_n = \sqrt{k/m}$$