Tentamen i Mekanik del 1 för Y

TMME12

2010-04-07, kl 14-18

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER1, TER2

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00 och 17.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivningstillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

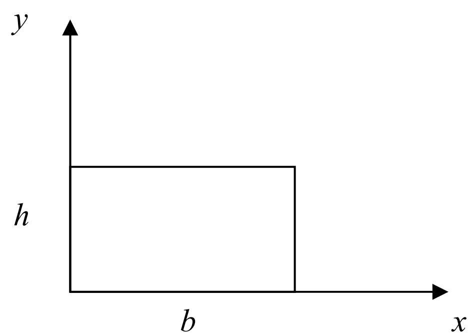
Tentamen i Mekanik del 1 för Y 2010-04-07

Teoridel:

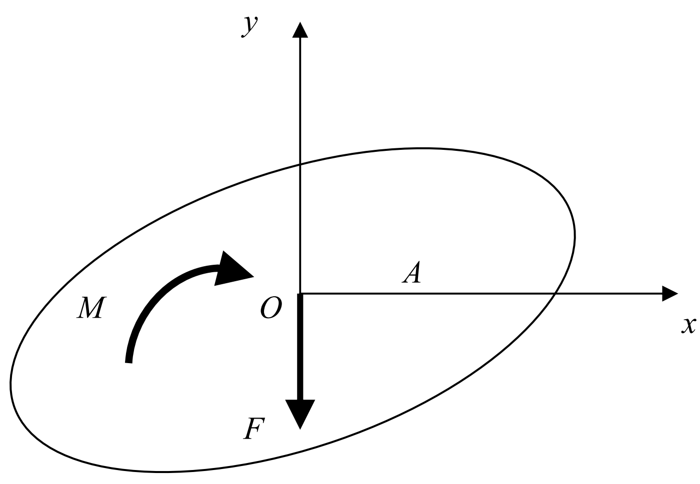
1a)
Masscentrum för en kropp definieras som bekant som

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV}, \text{ där } \rho = \text{densiteten}$$

Visa att masscentrum för en tunn homogen rektangulär skiva utgörs av punkten *(b/2, h/2)*. (1p)

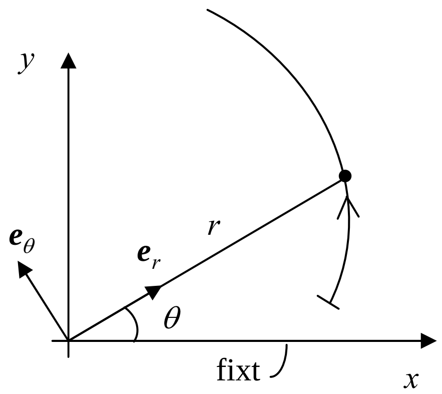


1b)
Givet en kraftvektor $\boldsymbol{F} = -F\boldsymbol{e}_y$ angripande i punkten O (origo) och ett kraftparsmoment $\boldsymbol{M} = -M\boldsymbol{e}_z$ där storleken är $M = Fa$. Visa att kraftsystemet kan reduceras till enbart en kraft angripande i punkten A med xy koordinaterna $(a, 0)$. (1p)



Tentamen i Mekanik del 1 för Y 2010-04-07

2a)
En partikels bana i polära koordinater ges av $r = r(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där t är tiden, se figur.



Sambandet mellan de polära riktningarna $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ och de fixa kartesiska riktningarna $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ lyder som bekant

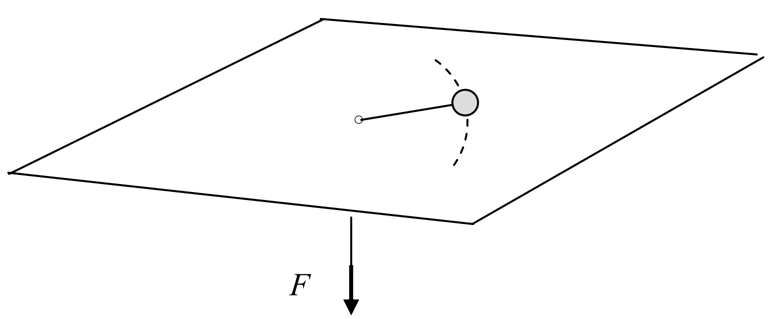
$$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_y$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\, \boldsymbol{e}_x + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_y$$

Visa att partikelns hastighet $\boldsymbol{v}$ i polära koordinater kan skrivas

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\, \boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\, \boldsymbol{e}_\theta$$

(1p)

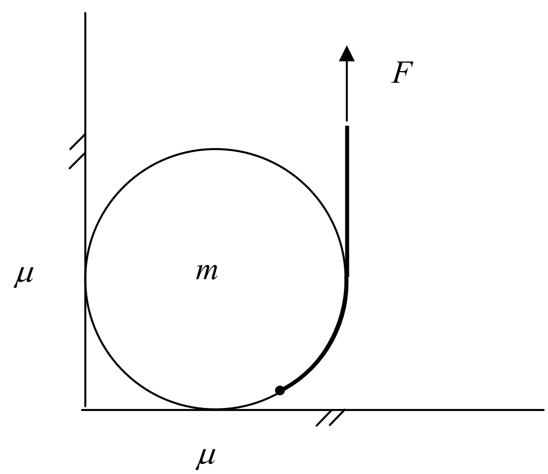
2b)
En liten kula är tvingad att röra sig i ett horisontellt plan. Kulan är fäst i ett snöre som i sin tur löper igenom ett litet hål i planet. Snöret hålls sträckt med en kraft F under planet. Kulan rör sig i en cirkelbana runt hålet med radien r_1 och snöret har då vinkelhastigheten ω_1. Om banan ändras till en ny cirkelbana med radien r_2, visa att snörets vinkelhastighet då blir $\omega_2 = \omega_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$. All friktion kan försummas i analysen. (1p)



Tentamen i Mekanik del 1 för Y 2010-04-07

Problemdel:

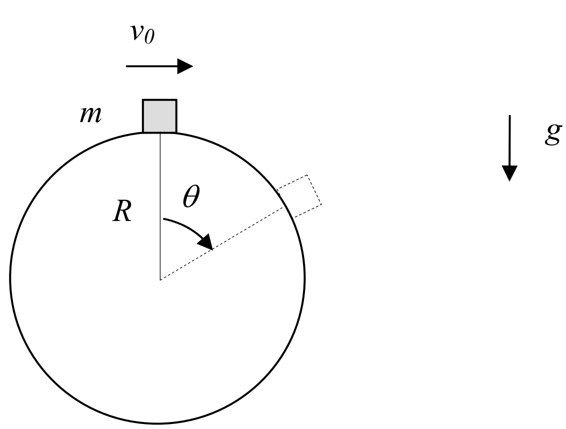
3)
En homogen cirkulär skiva har massan m och radien R. Ett snöre är fäst i skivans periferi och skivan vilar mot en vertikal vägg och ett horisontellt underlag enligt figur. Linan hålles spänd med en vertikal kraft F. Den statiska friktionskoefficienten är μ mellan både skivan och väggen och mellan skivan och underlaget. Hur stor kan kraften F maximalt vara utan att glidning uppstår. (2p)



4)
En partikel med massan m startar med hastigheten v_0 på toppen av en fix cirkulär cylinder. Cylindern har radien R och friktionen mellan partikeln och cylindern kan försummas.

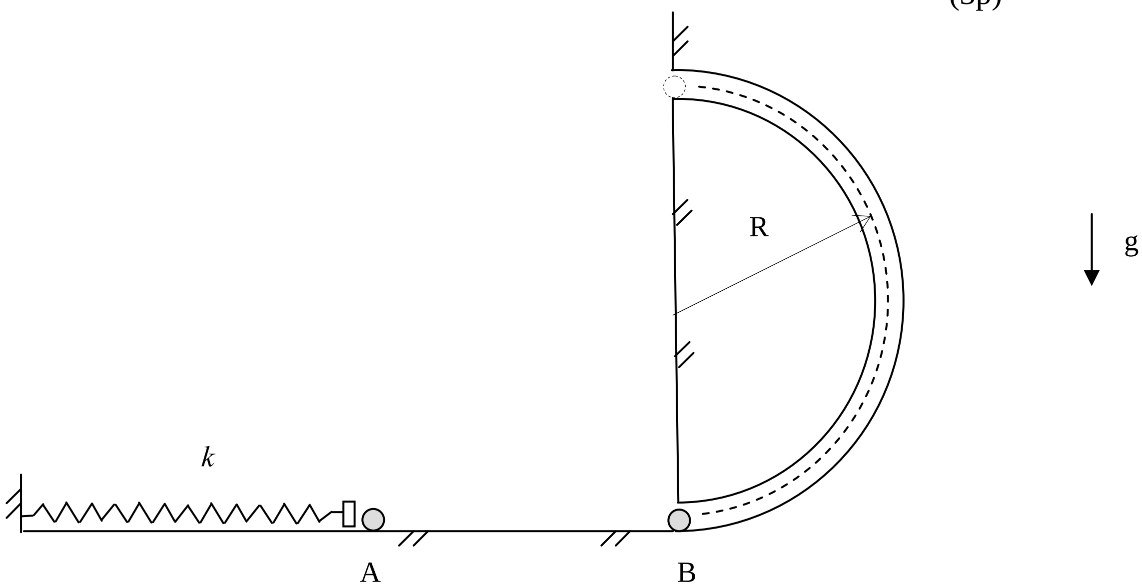
a) Beräkna normalkraften från cylindern på partikeln som funktion av vinkeln θ (2p)

b) Bestäm vinkeln då partikeln tappar kontakten med cylindern (1p)



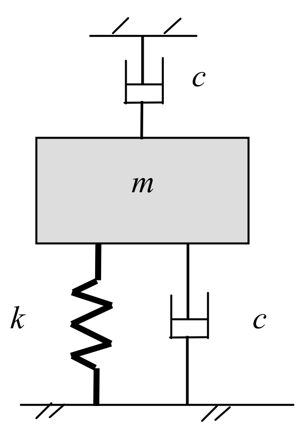
5)
En partikel A med massan *m* är intryckt i en fjäder och hålles i jämvikt varvid fjäderkraften blir *3mg*. Styvheten hos fjädern (fjäderkonstanten) är $k = mg/R$. Partikeln släpps från vila i det intryckta läget och kolliderar senare med en partikel B som även den har massan *m*. Efter kollisionen åker partikel B i ett cirkulärt spår vars radie är *R*, se figur. Bestäm för vilka stöttal som partikel B når den högsta punkten i detta spår. Förlusterna vid kollisionen antas vara de enda energiförlusterna i systemet.

(3p)



6)
Ett dämpsystem består av en fjäder med fjäderkonstanten *k* och två dämpare med dämpkonstanten $c = \sqrt{km}$ vardera. Massan *m* släpps från vila vid tiden $t = 0$ då fjädern är ospänd.

a) Bestäm kraften i fjädern som funktion av tiden (2p)
b) Beräkna massans maximala hastighet under rörelsen (1p)



Lösningar Mekanik Y del 1, TMME12

2010-04-07

1a) $\bar{r}_G = \frac{1}{m} \int_V \bar{r} \rho dV$

$\rho dV = \rho \cdot t\, dx dy$; $m = \int_A \rho t\, dx dy = \rho t b h$

$x_G = \frac{1}{\rho t b h} \rho t \int_A x\, dx dy = \frac{1}{bh} \int_0^h \left[\int_0^b x dx \right] dy =$

$= \frac{1}{bh} \int_0^h \frac{b^2}{2} dy = \frac{1}{bh} \frac{b^2}{2} h = \underline{\underline{\frac{b}{2}}}$

p.s.s fås $\underline{\underline{y_G = \frac{h}{2}}}$ v.s.v

1b) Reducera till A $\bar{R} = \bar{F} = -F\bar{e}_y$

$\bar{M}^A = \overline{AO} \times \bar{F} + \bar{M} = \bar{0}$

Således enbart en kraft $\bar{R} = -F\bar{e}_y$

2a) $\bar{r} = r\bar{e}_r$; $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r$

$\dot{\bar{e}}_r = -\dot{\theta} \sin\theta\, \bar{e}_x + \dot{\theta} \cos\theta\, \bar{e}_y = \dot{\theta} \bar{e}_\theta$

$\underline{\underline{\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta}}$ v.s.v

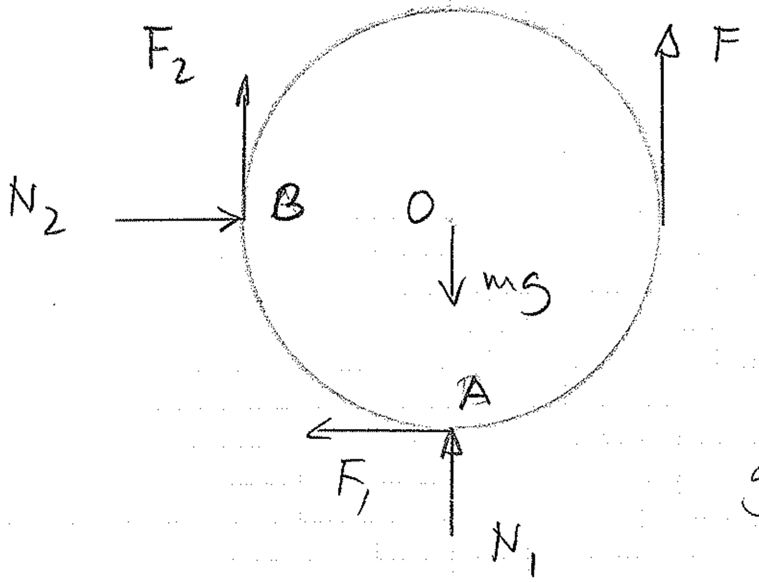
2b) $\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{0}$; $\bar{M}_O = \dot{\bar{h}}_O$

ger $\bar{h}_O = \bar{r} \times m\bar{v}$ är konst.

$\bar{h}_{O_1} = \bar{h}_{O_2}$; $r_1 \bar{e}_r \times m r_1 \dot{\theta}_1 \bar{e}_\theta = r_2 \bar{e}_r \times m r_2 \dot{\theta}_2 \bar{e}_\theta$

ger $r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2$; $\omega_2 = \omega_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

3) Frilägg



$\Sigma \bar{F} = \bar{0}$, $\Sigma \bar{M} = \bar{0}$

ger

$\rightarrow$ $N_2 - F_1 = 0$

$\uparrow$ $F + F_2 + N_1 - mg = 0$

$\circlearrowright O)$ $FR - F_1 R - F_2 R = 0$

Vid gränsfallet för glidning gäller vid A o B

$|F_1| = \mu |N_1|$; $|F_2| = \mu |N_2|$

där $N_1 > 0$, $N_2 > 0$

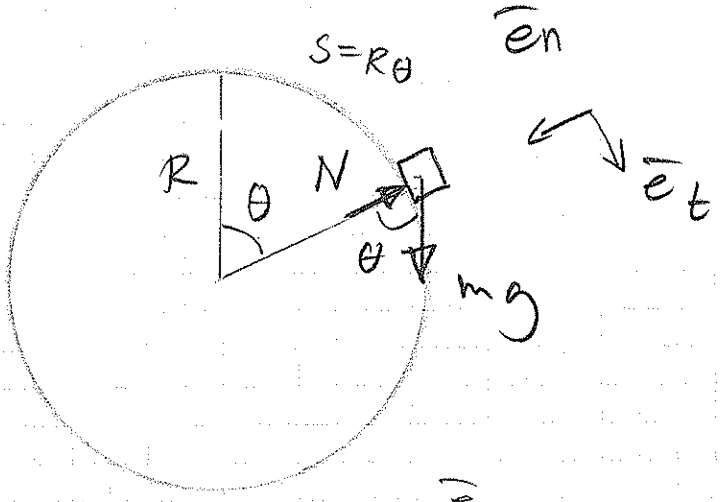
Detta ger

$$\begin{cases} N_2 - \mu N_1 = 0 \\ F + \mu N_2 + N_1 - mg = 0 \\ F - \mu N_1 - \mu N_2 = 0 \end{cases}$$

dvs

$$\underline{\underline{F = F_{max}}} = \frac{mg}{1 + \frac{1+\mu^2}{\mu(1+\mu)}}$$

4) Frilägg



Kinematik

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R} = R\dot{\theta}^2$$

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s} = R\ddot{\theta}$$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\bar{e}_n \swarrow \quad -N + mg\cos\theta = mR\dot{\theta}^2 \quad (1)$

$\bar{e}_t \searrow \quad mg\sin\theta = mR\ddot{\theta} \quad (2)$

Bestäm $\dot{\theta}^2(\theta)$ mha (2)

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta \quad ; \quad \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$\ddot{\theta}\,d\theta = \dot{\theta}\,d\dot{\theta} \quad ; \quad \int \frac{g}{R}\sin\theta\,d\theta = \int \dot{\theta}\,d\dot{\theta}$$

$$-\frac{g}{R}\cos\theta = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + C_1 \quad ; \quad \text{B.V. } \theta = 0 \; ; \; \dot{\theta} = \frac{V_0}{R}$$

ger $C_1 = -\frac{g}{R} - \frac{V_0^2}{2R^2}$ och

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{R}\cos\theta + \frac{2g}{R} + \frac{V_0^2}{R^2} \quad \text{ins. i (1)}$$

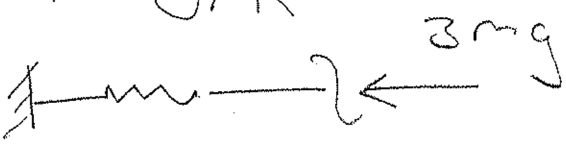
a) $\underline{\underline{N(\theta)}} = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mV_0^2}{R}$

b) $N = 0$ fås då

$$\underline{\underline{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{V_0^2}{3gR}\right)}} \quad \text{om} \quad V_0^2 \leq gR$$

$$\left(\theta = 0 \quad \text{om} \quad V_0^2 > gR \right)$$

5) $k = mg/R$



$\Rightarrow \quad \delta = 3R$

Hastighet före stöt v_f:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} k \delta^2 \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{g}{L} 9R^2 = 9gR \qquad (1)$$

Hastighet efter stöt v_e för toppen:

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = mg2R \quad \Rightarrow \quad v_e^2 = 4gR \qquad (2)$$

Stöttal

$$e = \frac{v_e - v}{v_f} \qquad (3)$$

Rörelsemängd

$$m v_f = m v_e + m v \qquad (4)$$

(4) o (3):

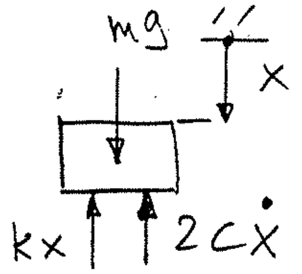
$$e = \frac{2v_e - v_f}{v_f} = /(1) \text{ o } (2)/ = \frac{1}{3} \quad // \quad \frac{1}{3} \le e \le 1$$

ger toppen

6)

a)

Frilägg ($x = 0$, fjädern ospänd)



$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} \quad \downarrow \quad mg - kx - 2c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

Identifiera: $2\zeta\omega_n = \frac{2c}{m}$, $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$

$\Rightarrow \zeta = 1 \quad \therefore \quad x = (At + B)e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{k}$

B.V $t = 0$ $\quad x = 0 \Rightarrow B = -mg/k$

$\dot{x} = 0 \Rightarrow A = B\omega_n = -\frac{mg}{k}\omega_n$

$\Rightarrow \quad x = -\frac{mg}{k}(\omega_n t + 1)e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{k}$

$\Rightarrow \quad \dot{x} = g t e^{-\omega_n t}$ $\quad$ max då $\ddot{x} = 0$

$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{\omega_n} \Rightarrow \dot{x}_{max} = g\frac{1}{\omega_n}e^{-1}$

Svar: $F = kx = mg(1 - (\omega_n t + 1)e^{-\omega_n t})$

$\dot{x}_{max} = g\frac{1}{\omega_n}e^{-1}$ där $\omega_n = \sqrt{k/m}$