Tentamen i Mekanik del 1 för Y

TMME12

2009-08-22, kl 8-12

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: T2

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 9.00 och 10.30)

Kursadministratör: Elisabeth Peterson, Tel. 28 24 42,
email elisabeth.peterson@liu.se

Antal uppgifter: 7

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivningstillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik del 1 för Y 2009-08-22

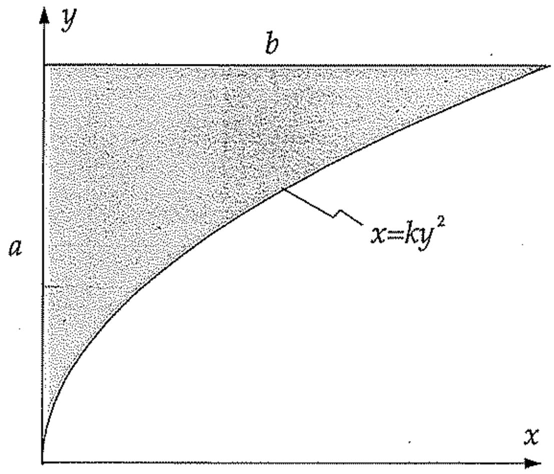
Teoridel:

1)
En homogen jämntjock skiva ligger i xy-planet enligt figur. Skivans form begränsas av linjerna $x=0$ och $y=a$ samt av kurvan $x=ky^2$, där $k=b/a^2$.
Utgå från definitionen av masscentrum

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV}$$

där ρ är densiteten, och visa att skivans masscentrum i x-led är $x_G=3b/10$.

(1p)



2)

Den kinetiska energin för en partikel ges som bekant av $T = \frac{1}{2}mv^2$.

Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, och visa att

$$U = T_2 - T_1$$

där U är uträttat arbete längs en bankurva från läge $\boldsymbol{r}_1$ till $\boldsymbol{r}_2$, dvs

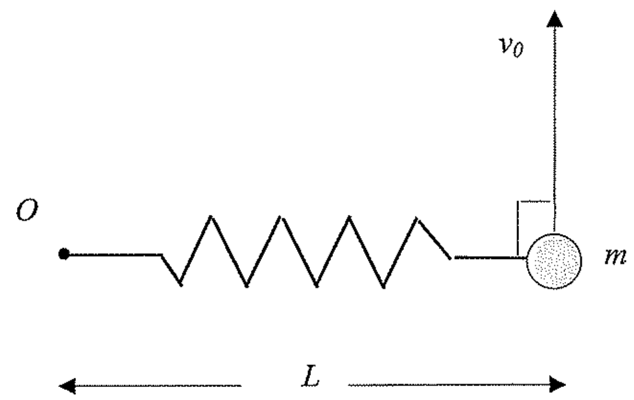
$$U = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \sum \boldsymbol{F} \circ d\boldsymbol{r}$$

(2p)

Ledning: $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \circ \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{v})$ där $\boldsymbol{v}$ är partikelns hastighetsvektor.

3)
En partikel med massan m är fastsatt i en fjäder vars ospända längd är L_0. Fjäderns andra ände är fix vid O. Hela systemet befinner sig på ett glatt horisontellt bord och när fjädern är förlängd så att längden är L, ger man partikeln en hastighet med beloppet v_0 vinkelrätt mot fjädern. Fjäderns maximala längd blir $2L$ under den efterföljande rörelsen. Utgå från impulsmomentekvationen och visa att partikelns fart blir $v_0/2$ i det läge då fjäderns längd är maximal.

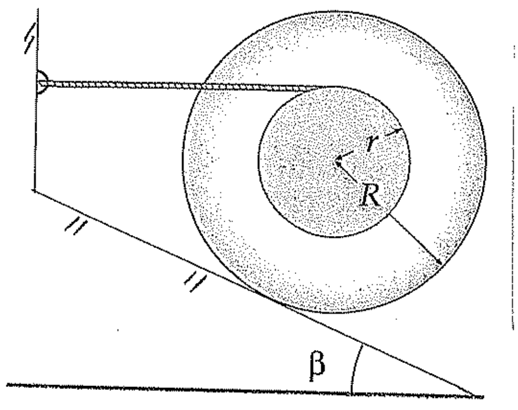
(1p)



Problemdel:

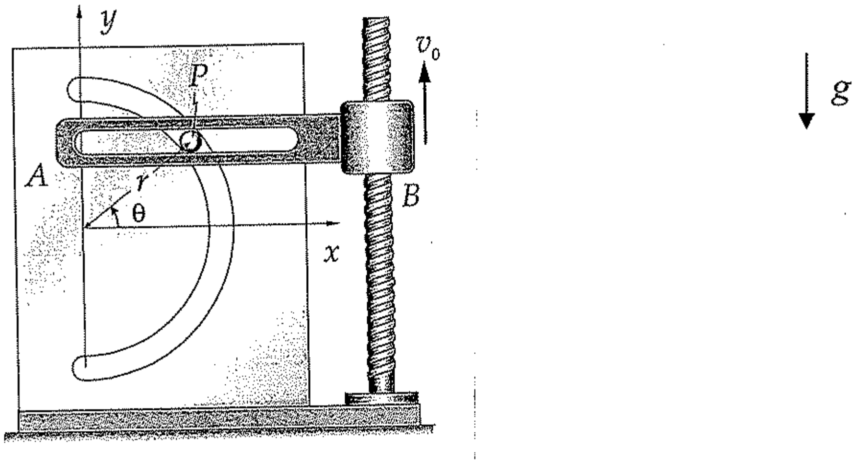
4)
En kabelrulle med massan m har en ytterradie R och en innerradie r. Rullen är placerad på ett strävt lutande plan som lutar vinkeln β mot horisontalen. Rullen hålles i fortvarig vila med hjälp av ett horisontellt snöre som är fäst i väggen och i rullen enligt figur.

a) Beräkna kraften i snöret. (1p)
b) Beräkna minsta värdet på friktionskoefficienten μ som krävs för att rullen inte skall glida. (1p)



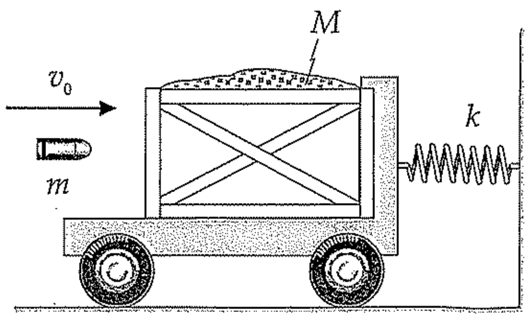
5)
En partikel P är styrd att följa ett halvcirkulärt spår i en fix vertikal skiva enligt figur. Den spårförsedda horisontella armen AB rör sig vertikalt uppåt med en konstant fart v_0 under ett visst tidsintervall då $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Det halvcirkulära spåret har radien r och partikelns massa är m och all friktion kan försummas. Beräkna normalkraften från armen AB på partikeln P som funktion av vinkeln θ i intervallet $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

(3p)



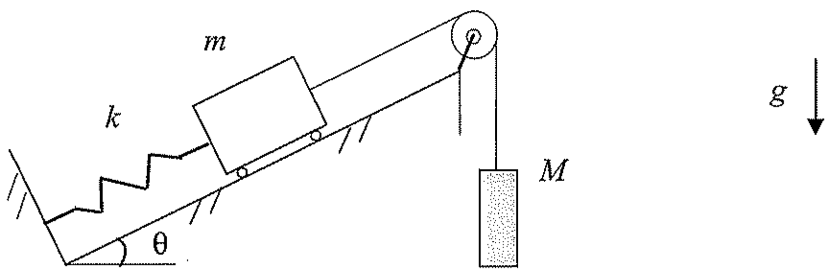
6)
En låda med sand har placerats på en vagn enligt figur. Vagnen kan friktionsfritt röra sig rätlinjigt på ett horisontellt underlag. Vagnen är från början i vila och är med en fjäder med fjäderkonstanten k förenad med en fix vägg. Sandlådan och vagnen har tillsammans massan M. En kula med horisontell hastighet träffar och fastnar i sandlådan efter stöten. Man observerar att fjäderns maximala deformation blir δ för den efterföljande rörelsen. Bestäm kulans fart v_0 innan den träffat sandlådan om kulans massa är m.

(3p)



7)
En vagn med massan m är via ett snöre som löper över en trissa förenad med en vikt med massan M enligt figur. Vagnens nedre ände är fäst i en fjäder med fjäderkonstanten k och vagnen kan röra sig längs ett lutande plan med lutningsvinkeln $\theta=30°$ mot horisontalen. Vikten med massan M kan enbart röra sig vertikalt, och fjädern och snördelen mellan vagnen och trissan är parallella med det lutande planet. Systemet släpps från vila då fjädern är ospänd. Beräkna kraften i snöret som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen (låt tiden $t=0$ då systemet släpps). Friktionen och trissans massa kan försummas.

(3p)



Lösningar TMME12 2009-08-22

1) $$x_G = \frac{\int_V x \rho \, dV}{\int_V \rho \, dV} \; ; \quad \rho = \text{konst.}, \quad t = \text{tjocklek} = \text{konst}, \quad dV = t\,dA$$

ger $$x_G = \frac{\int_A x \, dA}{\int_A dA} \; ; \quad dA = dx\,dy$$

$$\int_A x\,dx\,dy = \int_0^a \left[\int_0^{ky^2} x\,dx \right] dy = \int_0^a \tfrac{1}{2} k^2 y^4 dy$$

$$= \frac{k^2 a^5}{10}$$

$$\int_A dx\,dy = \int_0^a \left[\int_0^{ky^2} dx \right] dy = \int_0^a k y^2 dy = k\frac{a^3}{3}$$

$$x_G = \frac{\frac{k^2 a^5}{10}}{\frac{k a^3}{3}} = \frac{3}{10} k a^2 \quad \text{där} \quad k = \frac{b}{a^2}$$

ger $$\underline{\underline{x_G = \frac{3}{10} b}}$$ V.S.V

2) $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ mult. med $d\bar{r}$ skalärt

$$\underbrace{\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \Sigma \bar{F} \circ d\bar{r}}_{U} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} m\bar{a} \circ d\bar{r}$$

$$U = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} m\bar{a} \circ d\bar{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\bar{v}}{dt} \circ \frac{d\bar{r}}{dt} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\bar{v}}{dt} \circ \bar{v}\, dt = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\bar{v} \circ \bar{v})\, dt =$$

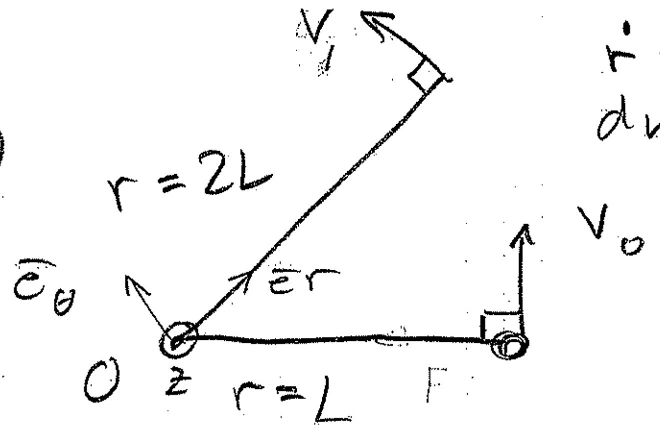
$$= \frac{m}{2} \Big[|\bar{v}|^2 \Big]_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2} \Big[v^2 \Big]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{m}{2} \left(v^2(t_2) - v^2(t_1) \right) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

dvs $U = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$ eller

$U = T_2 - T_1$ v.s.v

3)



$\dot{r} = 0$ då r är max
dvs $\bar{V}_1 = V_\theta \bar{e}_\theta = V_1 \bar{e}_\theta$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{M}_O \, dt = \bar{h}_{O_2} - \bar{h}_{O_1} \quad ; \quad \bar{h}_O = \bar{r} \times m\bar{V}$$

M.a.p z-axeln fås $M_{Oz} = 0 \quad \forall t$
då fjäderkraften är en centralkraft

Således $\int_{t_1}^{t_2} M_{Oz} \, dt = 0$ dvs

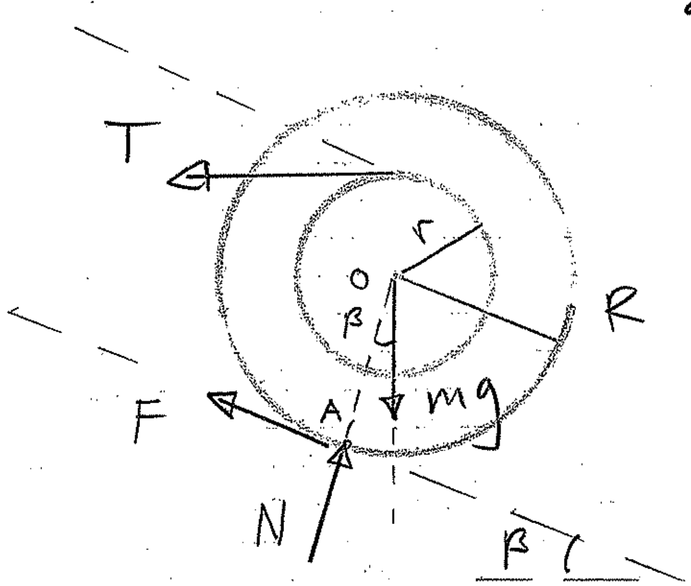
$$0 = h_{O_2 z} - h_{O_1 z}$$

$$0 = mV_1 \cdot 2L - mV_0 \cdot L$$

ger $V_1 = \dfrac{V_0}{2}$ v.s.v

4) Frilägg rullen

$\Sigma \bar{F} = \bar{0}, \quad \Sigma \bar{M} = 0$



O) $F \cdot R - T \cdot r = 0$ (1)

A) $mgR\sin\beta - T(R\cos\beta + r) = 0$ (2)

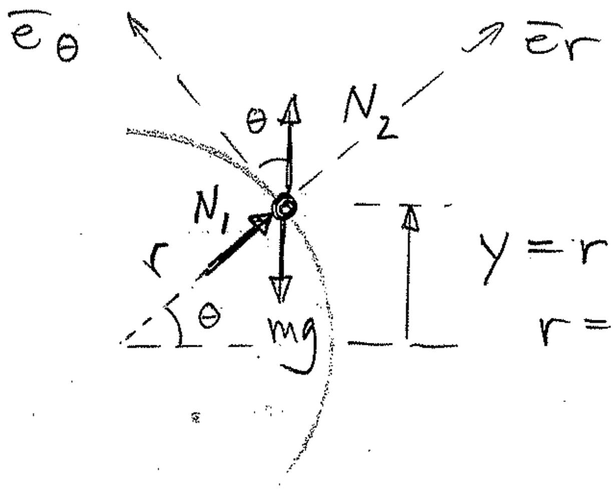
↗ $N - mg\cos\beta - T\sin\beta = 0$ (3)

(1), (2), (3) ger

$$\begin{cases} T = mg\dfrac{R\sin\beta}{R\cos\beta + r} \\ F = mg\dfrac{r\sin\beta}{R\cos\beta + r} \\ N = mg\dfrac{(R + r\cos\beta)}{R\cos\beta + r} \end{cases}$$

$\left|\dfrac{F}{N}\right| \leq \mu$ ger att $\mu \geq \dfrac{r\sin\beta}{R + r\cos\beta}$

5) Frilägg partikeln P



$y = r\sin\theta$; $\dot{y} = V_0 =$ = konst.

r = konst.

$\dot{y} = r\dot{\theta}\cos\theta = V_0$ dvs $\dot{\theta} = \dfrac{V_0}{r\cos\theta}$ och

$$\ddot{\theta} = \frac{V_0^2}{r^2}\,\frac{\tan\theta}{\cos^2\theta} \qquad (1)$$

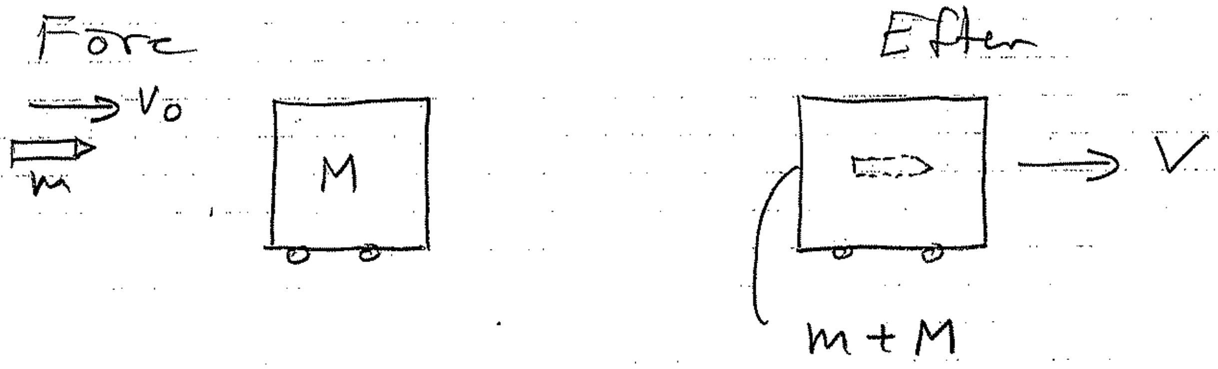
$\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$ gör i $\bar{e}_\theta$ riktn.

$$\nwarrow \quad N_2\cos\theta - mg\cos\theta = m\left(r\ddot{\theta} + \overset{=0}{2\dot{r}\dot{\theta}}\right)$$

och via (1) fås

$$N_2 = mg + m\frac{V_0^2}{r}\,\frac{\tan\theta}{\cos^3\theta} \qquad \|$$

6) Räkna ut hastigheten V efter stöten



$\Delta P_x = 0$ för systemet ger

$$\longrightarrow \quad m V_0 = (m+M)\,V$$

$$V = \frac{m V_0}{m+M} \qquad (1)$$

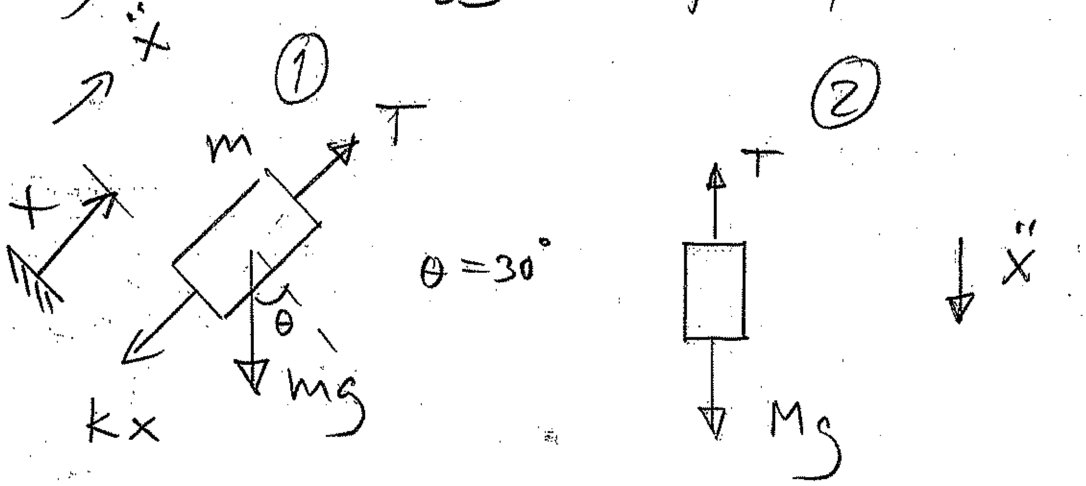
Energiekv. ger efter stöten till vändläget

$$0 = -\frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}k\,\delta^2 \qquad (2)$$

(1), (2) ger

$$V_0 = \frac{\delta}{m}\sqrt{k(m+M)} \qquad \|$$

7) Frilägg varje partikel



$\sum F = m\bar{a}$ ger

1 $\nearrow$ $T - kx - mg\sin\theta = m\ddot{x}$ (1)

2 $\downarrow$ $Mg - T = M\ddot{x}$ (2)

(2) ger $T = Mg - M\ddot{x}$ ins. i (1)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m+M}x = \left(M - \tfrac{1}{2}m\right)\frac{g}{m+M} \quad (3)$$

(3) har lösningen

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{g}{k}\left(M - \tfrac{1}{2}m\right)$$

B. V. $t = 0$ $x(0) = 0$ ger $A = -\left(M - \frac{m}{2}\right)\frac{g}{k}$

$\dot{x}(0) = 0$ ger $B = 0$

Således $x(t) = \left(M - \tfrac{1}{2}m\right)\frac{g}{k}\left(1 - \cos\omega_n t\right)$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$

(2) ger $T = Mg - M\ddot{x}$

drs $\underline{\underline{T(t)}} = Mg\left(1 - \frac{(M - \frac{1}{2}m)}{m+M}\cos\omega_n t\right)$ ||

där $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$