

Tentamen i Mekanik del 1 för Y

TMME12

2009-08-22, kl 8-12

Tentamenskod: TEN1

Tentsal: T2

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 9.00 och 10.30)

Kursadministratör: Elisabeth Peterson, Tel. 28 24 42,
email elisabeth.peterson@liu.se

Antal uppgifter: 7

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-
tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till
Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Teoridel:

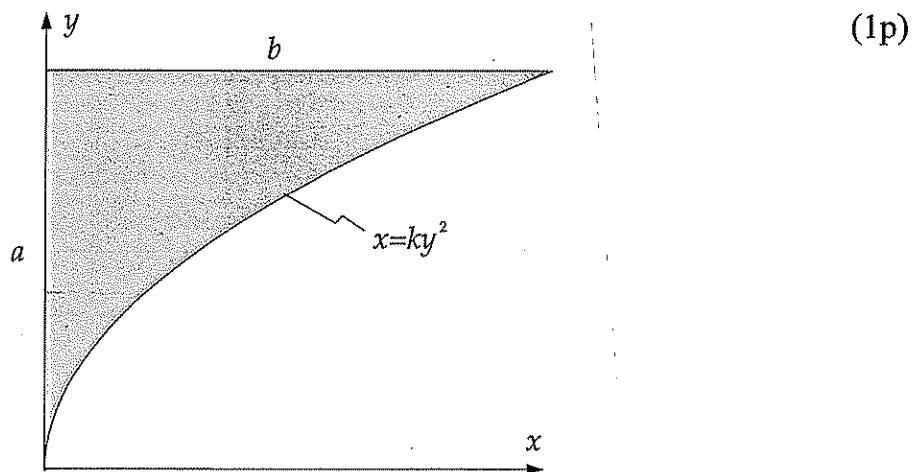
1)

En homogen jämntjock skiva ligger i xy -planet enligt figur. Skivans form begränsas av linjerna $x=0$ och $y=a$ samt av kurvan $x=ky^2$, där $k=b/a^2$.

Utgå från definitionen av masscentrum

$$\mathbf{r}_G = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

där ρ är densiteten, och visa att skivans masscentrum i x -led är $x_G = 3b/10$.



2)

Den kinetiska energin för en partikel ges som bekant av $T = \frac{1}{2}mv^2$.

Utgå från Newtons kraftlag $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, och visa att

$$U = T_2 - T_1$$

där U är uträttat arbete längs en bankurva från läge \mathbf{r}_1 till \mathbf{r}_2 , dvs

$$U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \Sigma \mathbf{F} \circ d\mathbf{r}$$

(2p)

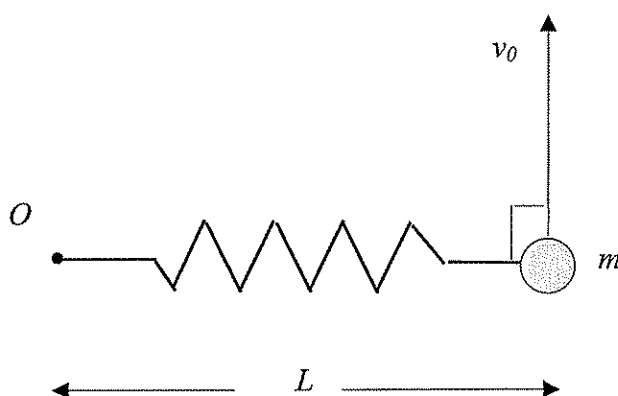
Ledning: $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \circ \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \circ \mathbf{v})$ där \mathbf{v} är partikelns hastighetsvektor.

Tentamen i Mekanik del 1 för Y 2009-08-22

3)

En partikel med massan m är fastsatt i en fjäder vars ospända längd är L_0 . Fjäders andra ände är fix vid O . Hela systemet befinner sig på ett glatt horisontellt bord och när fjädern är förlängd så att längden är L , ger man partikeln en hastighet med beloppet v_0 vinkelrätt mot fjädern. Fjäders maximala längd blir $2L$ under den efterföljande rörelsen. Utgå från impulsmomentekvationen och visa att partikelns fart blir $v_0/2$ i det läge då fjäderns längd är maximal.

(1p)

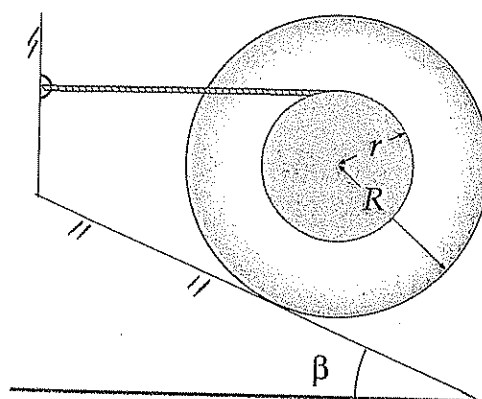


Problemdel:

4)

En kabelrulle med massan m har en ytterradie R och en innerradie r . Rullen är placerad på ett strävt lutande plan som lutar vinkeln β mot horisontalen. Rullen hålls i fortvarig vila med hjälp av ett horisontellt snöre som är fäst i väggen och i rullen enligt figur.

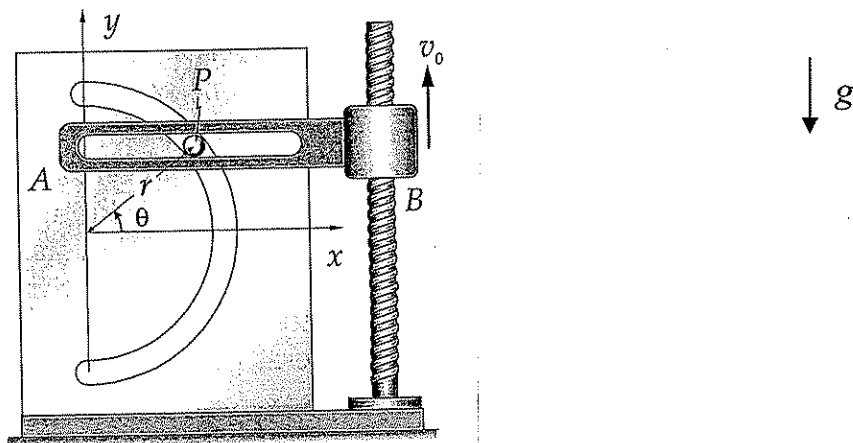
- Beräkna kraften i snöret. (1p)
- Beräkna minsta värdet på friktionskoefficienten μ som krävs för att rullen inte skall glida. (1p)



5)

En partikel P är styrd att följa ett halvcirkulärt spår i en fix vertikal skiva enligt figur. Den spårförsedda horisontella armen AB rör sig vertikalt uppåt med en konstant fart v_0 under ett visst tidsintervall då $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Det halvcirkulära spåret har radien r och partikelns massa är m och all friktion kan försummas. Beräkna normalkraften från armen AB på partikeln P som funktion av vinkeln θ i intervallet $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

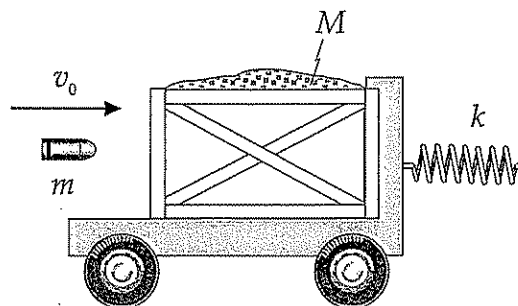
(3p)



6)

En låda med sand har placerats på en vagn enligt figur. Vagnen kan friktionsfritt röra sig rätlinjigt på ett horisontellt underlag. Vagnen är från början i vila och är med en fjäder med fjäderkonstanten k förenad med en fix vägg. Sandlådan och vagnen har tillsammans massan M . En kula med horisontell hastighet träffar och fastnar i sandlådan efter stöten. Man observerar att fjäderns maximala deformation blir δ för den efterföljande rörelsen. Bestäm kulans fart v_0 innan den träffat sandlådan om kulans massa är m .

(3p)

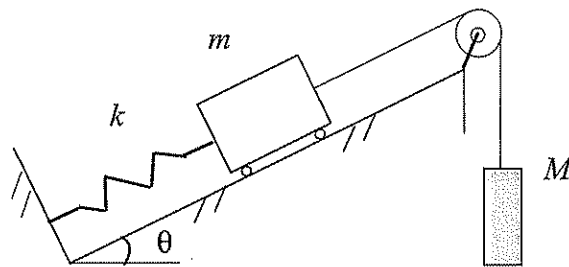


Tentamen i Mekanik del 1 för Y 2009-08-22

7)

En vagn med massan m är via ett snöre som löper över en trissa förenad med en vikt med massan M enligt figur. Vagnens nedre ände är fäst i en fjäder med fjäderkonstanten k och vagnen kan röra sig längs ett lutande plan med lutningsvinkeln $\theta=30^\circ$ mot horisontalen. Vikten med massan M kan enbart röra sig vertikalt, och fjädern och snördelen mellan vagnen och trissan är parallella med det lutande planet. Systemet släpps från vila då fjädern är ospänd. Beräkna kraften i snöret som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen (låt tiden $t=0$ då systemet släpps). Friktionen och trissans massa kan försummas.

(3p)



$$1) \quad x_G = \frac{V \int x g dV}{\int g dV} \quad ; \quad g = \text{konst.}$$

$$t = t_{\text{rocklek}} = \text{konst}$$

$$dV = t dA$$

$$\text{ger} \quad x_G = \frac{A \int x dA}{\int dA} \quad ; \quad dA = dx dy$$

$$\int_A x dx dy = \int_0^a \left[\int_0^{ky^2} x dx \right] dy = \int_0^a \frac{1}{2} k^2 y^4 dy$$

$$= \frac{k^2 a^5}{10}$$

$$\int_A dx dy = \int_0^a \left[\int_0^{ky^2} dx \right] dy = \int_0^a ky^2 dy = k \frac{a^3}{3}$$

$$x_G = \frac{\frac{k^2 a^5}{10}}{\frac{ka^3}{3}} = \frac{3}{10} ka^2 \quad \text{där} \quad k = \frac{b}{a^2}$$

$$\text{ger} \quad \underline{\underline{x_G = \frac{3}{10} b}} \quad \text{V.S.V}$$

2) $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ mult. med $d\vec{r}$ skalärt

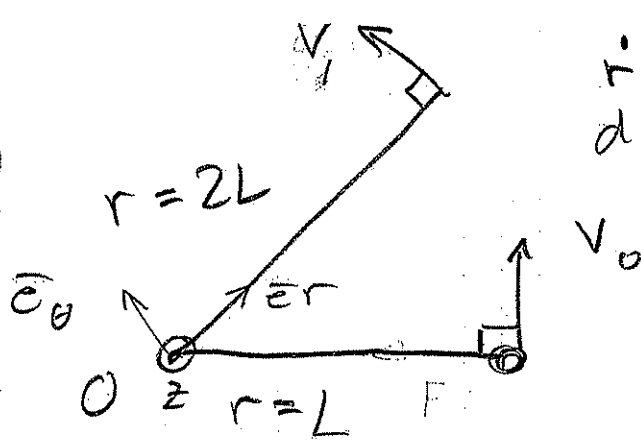
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \Sigma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} U &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \\ &= \frac{m}{2} \left[|\vec{v}|^2 \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2} \left[v^2 \right]_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{m}{2} (v^2(t_2) - v^2(t_1)) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \end{aligned}$$

dvs $U = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$ eller

$$U = T_2 - T_1 \quad \text{v. s. v}$$

3)



$\dot{r} = 0$ då r är max
dvs $\vec{v}_1 = v_\theta \vec{e}_\theta = v_1 \vec{e}_\theta$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_0 dt = \vec{h}_{02} - \vec{h}_{01} \quad ; \quad \vec{h}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$$

M. a. p z-axeln fås $M_{0z} = 0 \quad \forall t$

då fjäderkraften är en centralkraft

Således
$$\int_{t_1}^{t_2} M_{0z} dt = 0 \quad \text{dvs}$$

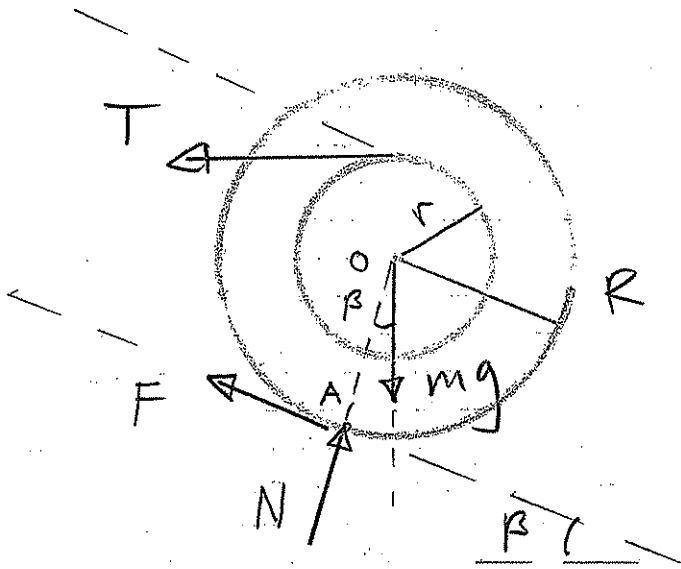
$$0 = h_{02z} - h_{01z}$$

$$0 = m v_1 \cdot 2L - m v_0 \cdot L$$

ger
$$v_1 = \frac{v_0}{2} \quad \text{v. s. v}$$

4) Fritaggs rullen

$$\sum \vec{F} = \vec{0}, \quad \sum \vec{M} = 0$$



$$\textcircled{O} \quad F \cdot R - T \cdot r = 0 \quad (1)$$

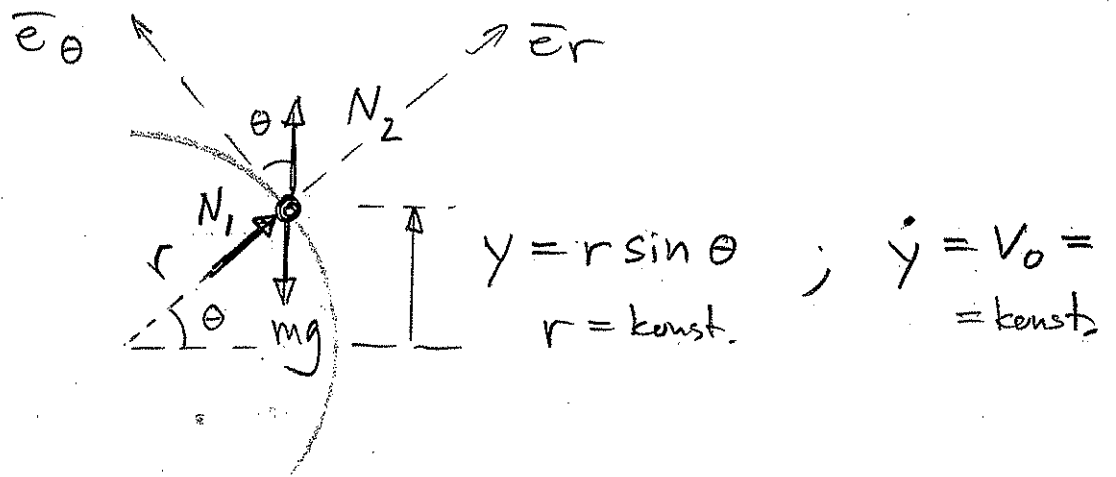
$$\textcircled{A} \quad mg R \sin \beta - T (R \cos \beta + r) = 0 \quad (2)$$

$$\uparrow \quad N - mg \cos \beta - T \sin \beta = 0 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \quad \text{ger} \quad \left\{ \begin{array}{l} T = mg \frac{R \sin \beta}{R \cos \beta + r} \\ F = mg \frac{r \sin \beta}{R \cos \beta + r} \\ N = mg \frac{R + r \cos \beta}{R \cos \beta + r} \end{array} \right. \parallel$$

$$\left| \frac{F}{N} \right| \leq \mu \quad \text{ger} \quad \text{alt} \quad \mu \geq \frac{r \sin \beta}{R + r \cos \beta} \parallel$$

5) Friläst partikeln P



$$\dot{y} = r \dot{\theta} \cos \theta = v_0 \quad \text{dvs} \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{r \cos \theta} \quad \text{och}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{v_0^2}{r^2} \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} \quad (1)$$

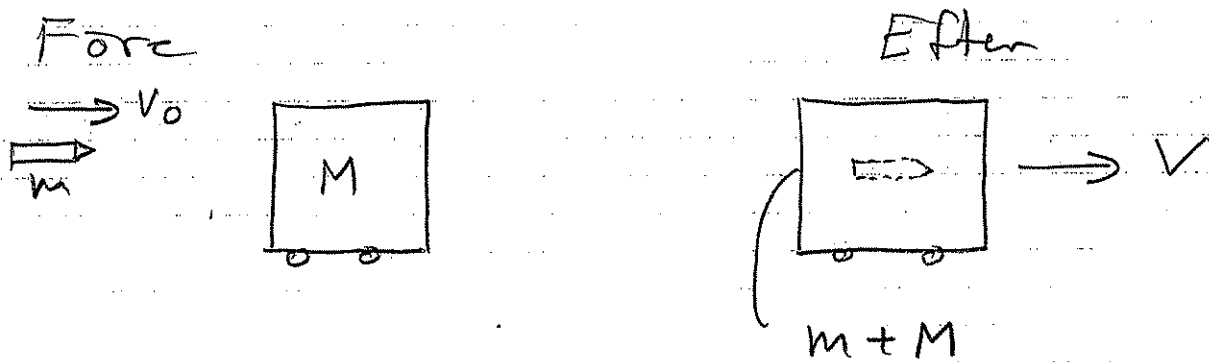
$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$ ger i \vec{e}_θ riktn. "0"

$$N_2 \cos \theta - mg \cos \theta = m (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta})$$

och via (1) fås

$$N_2 = mg + m \frac{v_0^2}{r} \frac{\tan \theta}{\cos^3 \theta} \quad ||$$

6) Räkna ut hastigheten V efter stöten



$\Delta P_x = 0$ för systemet ger

$$\rightarrow m v_0 = (m+M) V$$

$$V = \frac{m v_0}{m+M} \quad (1)$$

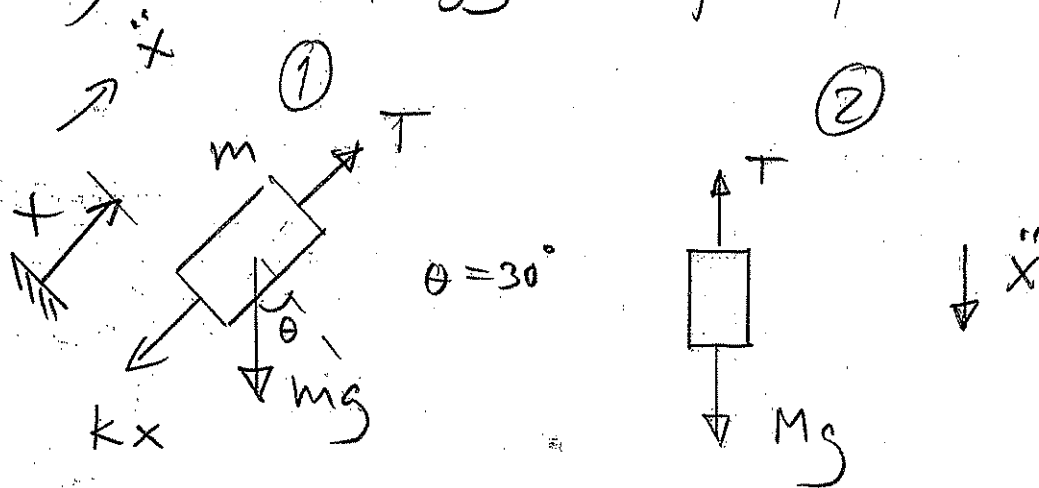
Energikv. ger efter stöten till vändläget

$$0 = -\frac{1}{2} (m+M) V^2 + \frac{1}{2} k s^2 \quad (2)$$

(1), (2) ger

$$v_0 = \frac{s}{m} \sqrt{k(m+M)} \quad ||$$

7) Frihängs varje partikel



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \text{ ger}$$

$$\textcircled{1} \quad T - kx - mg \sin \theta = m \ddot{x} \quad (1)$$

$$\textcircled{2} \quad Mg - T = M \ddot{X} \quad (2)$$

$$(2) \text{ ger } T = Mg - M \ddot{X} \text{ ins. i (1)}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m+M} x = \left(M - \frac{1}{2}m\right) \frac{g}{m+M} \quad (3)$$

(3) har lösningen

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{g}{k} \left(M - \frac{1}{2}m\right)$$

$$\text{B. V. } t=0 \quad x(0) = 0 \quad \text{ger } A = -\left(M - \frac{1}{2}m\right) \frac{g}{k}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \text{ger } B = 0$$

$$\text{Således } x(t) = \left(M - \frac{1}{2}m\right) \frac{g}{k} (1 - \cos \omega_n t)$$

$$\text{där } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

$$(2) \text{ ger } T = Mg - M\ddot{x}$$

$$\text{dvs } \underline{T(t)} = Mg \left(1 - \frac{(M - \frac{1}{2}m)}{m+M} \cos \omega_n t \right) \parallel \parallel$$

$$\text{dar } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$