Tentamen i Mekanik del 1 för Y

TMME12

2009-04-14, kl 14-18

Provkod: TEN1

Tentasal: TER 1

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Ulf Edlund, Tel. 28 11 10,
(Besöker salarna ca 15.00 och 16.30)

Kursadministratör: Elisabeth Peterson, Tel. 28 24 42,
email elisabeth.peterson@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivningstillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

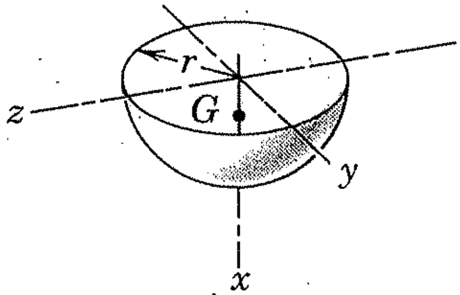
Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 6

Tentamen i Mekanik del 1 för Y, 2009-04-14

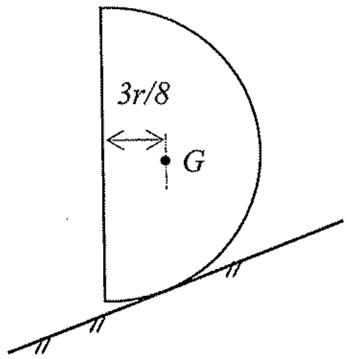
Teoridel:

1a)
Visa att masscentrum G för ett homogent halvklot med radien r har x-koordinaten $x_G = 3r/8$.
Utgå från definitionen av masscentrum.

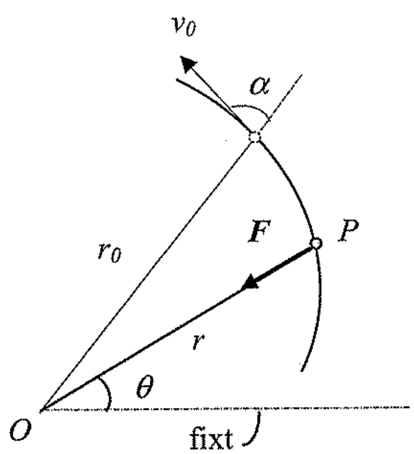
(1p)



1b)
Ett homogent halvklot, som står på ett strävt lutande plan, är i jämvikt då den plana ytan är vertikal enligt figur. Hur stor måste friktionskoefficienten minst vara? (1p)



2)
En partikel P rör sig under inverkan av en centralkraft $\boldsymbol{F}$ riktad in mot punkten O hela tiden. När partikeln befinner sig på avståndet r_0 från O har den farten v_0 och dess hastighetsvektor bildar vinkeln α mot den radiella riktningen, se figur. Visa att sektorhastigheten (dvs arean som $r = OP$ sveper över per tidsenhet) kan skrivas $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r_0 v_0 \sin\alpha$. (2p)

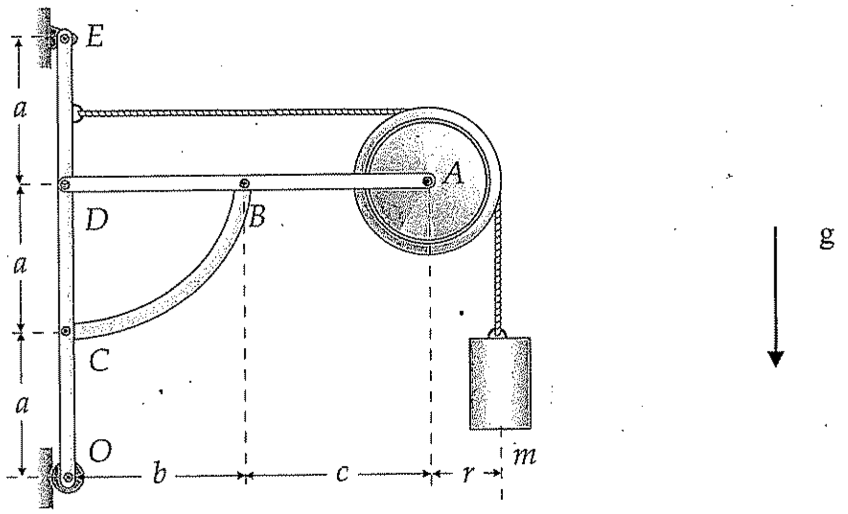


Tentamen i Mekanik del 1 för Y, 2009-04-14

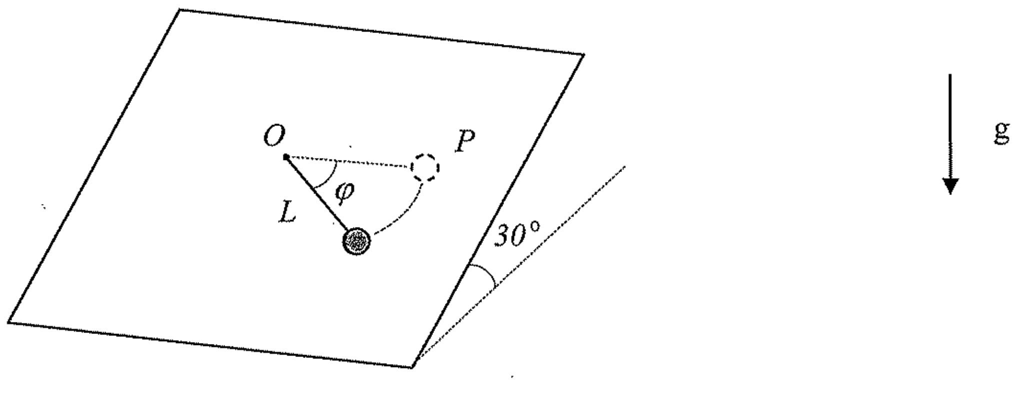
Problemdel:

3)
En tyngd med massan m är via ett snöre upphängd i ett länksystem bestående av stängerna OE, AD och BC enligt figuren. Snöret löper över en trissa med radien r. Snörets, trissans och stängernas massor kan försummas och alla leder (inklusive rullen vid O) är friktionsfria. Beräkna reaktionskrafterna på stången OE i punkterna O och E samt kraften på stången AD i punkten D. Svara med krafternas belopp. Mått enligt figuren.

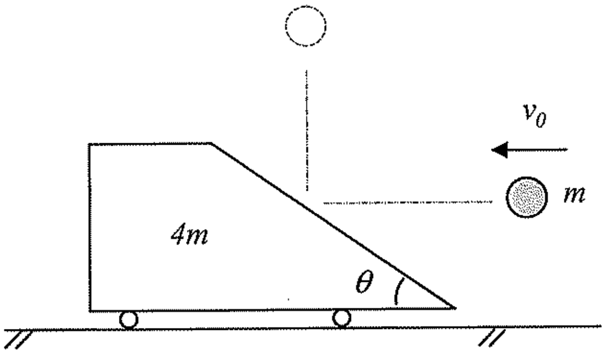
(2p)



4)
En partikel med massan m är fäst i ena ändan av ett snöre med längden L. Snörets andra ända är fäst i en punkt O på ett glatt lutande plan med lutningsvinkeln 30° mot horisontalplanet. Partikeln släpps från vila i punkten P med sträckt, horisontellt snöre. Bestäm kraften i snöret som funktion av vinkeln φ. (3p)

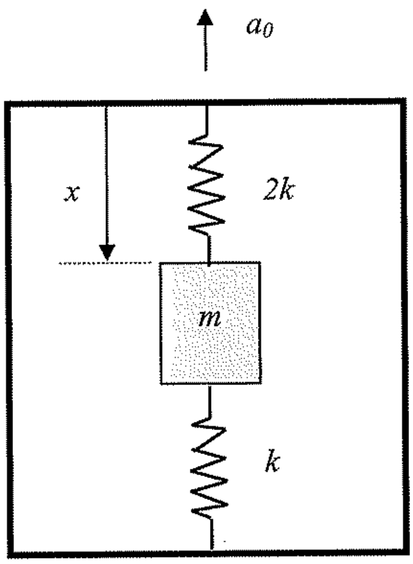


5)
En liten boll med massan m skjuts iväg i horisontell riktning med farten v_0 mot en stillastående vagn med massan $4m$ enligt figur. Bollen träffar vagnens glatta yta som lutar en vinkel $\theta = 30^\circ$. Omedelbart efter stöten får bollen en hastighet enbart i vertikal riktning och vagnen rör sig åt vänster utan att tippa. Stöttalet är $e = 3/4$ och all friktion kan försummas. Beräkna
a) bollens och vagnens hastigheter omedelbart efter stöten (2p)
b) beloppet av stötimpulsen mellan bollen och vagnen. (1p)



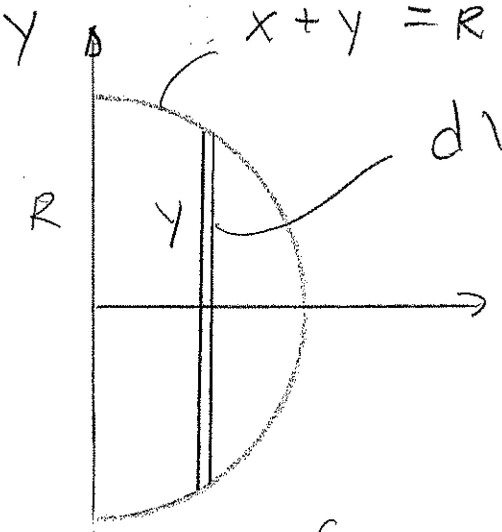
6)
En vikt med massan m är placerad i en hiss och kopplad till hissen via två fjädrar enligt figur. Den övre fjädern är fäst i hissens tak medan den undre fjädern är fäst i hissens golv. Fjäderkonstanterna är $2k$ respektive k, och varje fjäder har ospända längden L_0. Hissen ges en konstant vertikal acceleration a_0 uppåt i förhållande till fixa marken. En person som åker i hissen håller vikten stilla relativt hissen med båda fjädrarna ospända. Personen släpper sedan vikten utan hastighet relativt hissen och en svängningsrörelse uppstår.

a) Bestäm viktens rörelse relativt hissen som funktion av tiden, dvs $x(t)$ (2p) (låt $t=0$ då vikten släpps).
b) Beräkna svängningstiden för vikten. (1p)



1a)

$$x^2 + y^2 = R^2$$



$$dV = \pi y^2 dx = \pi (R^2 - x^2) dx$$

(cirkelskiva)

$R = r$

$\rho =$ konst.

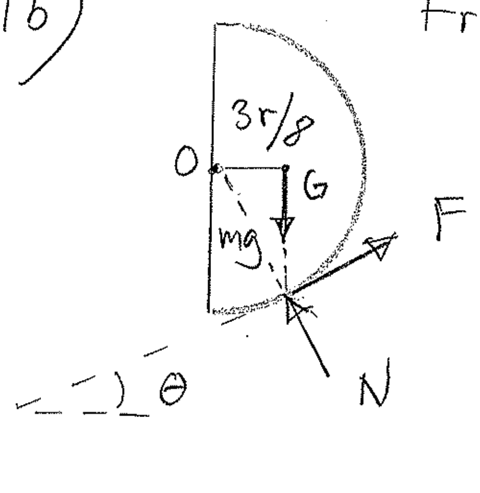
$$x_G = \frac{\int_V x \rho \, dV}{\int_V \rho \, dV} = \frac{\int_V x \, dV}{\int_V dV}$$

$$\int_V x \, dV = \int_0^R x \pi (R^2 - x^2) dx = \pi \frac{R^4}{4}$$

$$\int_V dV = \int_0^R \pi (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$x_G = \frac{\pi R^4 / 4}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3R}{8} \overset{R=r}{=} \underline{\underline{\frac{3r}{8}}} \quad \text{V.S.V}$$

1b)



Frilägg: $\Sigma \bar{F} = \bar{0}$, $\Sigma \bar{M} = \bar{0}$ Jämvikt

$\nearrow$ $F - mg \sin\theta = 0$

$\nwarrow$ $N - mg \cos\theta = 0$

$\circlearrowleft O$ $mg \frac{3r}{8} - F \cdot r = 0$

ger $F = mg \frac{3}{8}$; $N = mg \frac{\sqrt{55}}{8}$

Frikt. vilkoret $\left| \frac{F}{N} \right| \le \mu$ ger $\underline{\mu \ge \frac{3}{\sqrt{55}}}$

2) $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger i θ-led (polara koord.)

$$0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad \forall t$$

dvs. $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$

Således $r^2\dot{\theta} = h = \text{konst.}$

Då $r = r_0$ är $V_\theta = V_0 \sin\alpha$

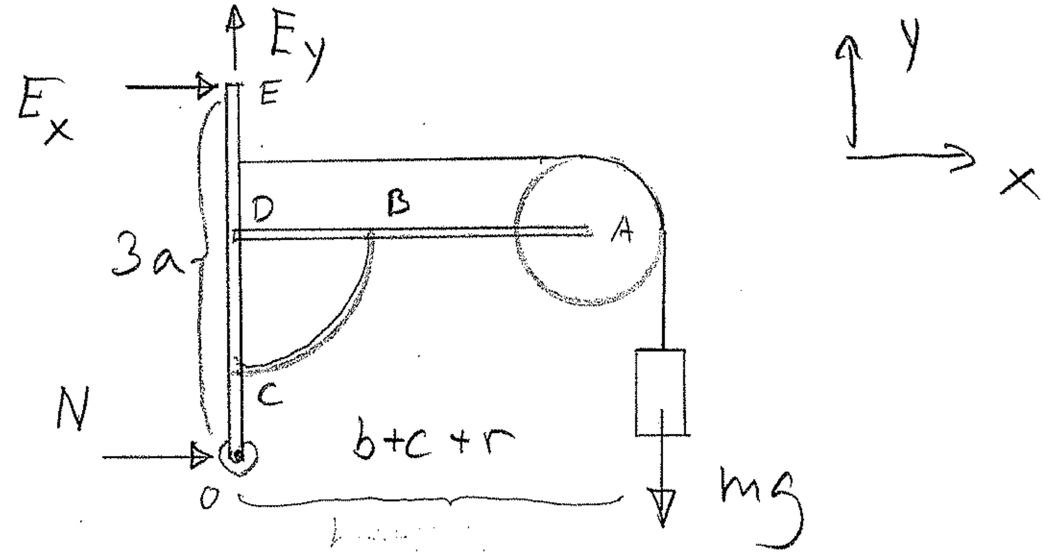
men $V_\theta = r\dot{\theta}$ ger $r^2\dot{\theta} = h = r_0 V_0 \sin\alpha$

Arean $dA = r\,d\theta\,\frac{r}{2} = \frac{r^2}{2}d\theta$

sektorhastigheten $\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\dot{\theta} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}r_0 V_0 \sin\alpha$

Således: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r_0 V_0 \sin\alpha$ V.s.v

3) Frilägg systemet



$\Sigma \bar{F} = \bar{0}$, $\Sigma \bar{M} = \bar{0}$ ger

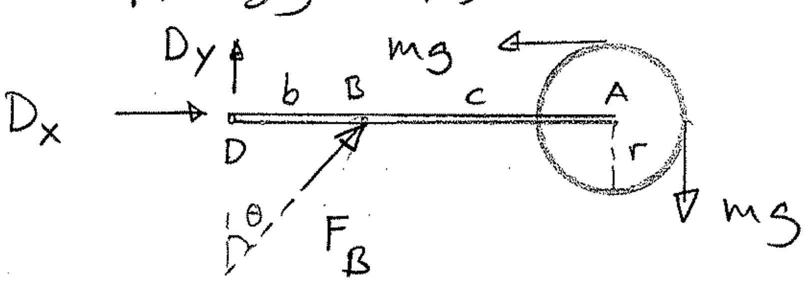
$\rightarrow$ $E_x + N = 0$ (1)

$\uparrow$ $E_y - mg = 0$ (2)

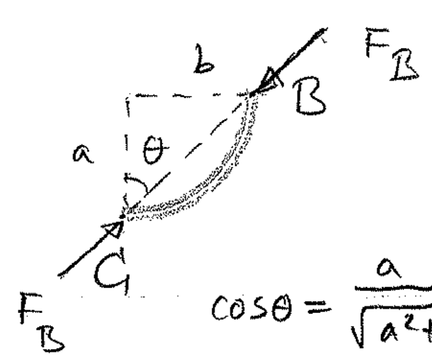
$\circlearrowleft E)$ $N \cdot 3a - mg(b+c+r) = 0$ (3)

(1) -- (3) ger
$$\begin{cases} E_x = -(b+c+r)\frac{1}{3a}mg \\ E_y = mg \\ N = (b+c+r)\frac{1}{3a}mg \end{cases}$$

Frilägg AD



BC "two force member"



$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\tan\theta = b/a$$

$\Sigma \bar{F} = \bar{0}, \quad \Sigma \bar{M} = \bar{0}$ ger

$$\rightarrow \quad D_x + F_B \sin\theta - mg = 0 \qquad (4)$$

$$\uparrow \quad D_y + F_B \cos\theta - mg = 0 \qquad (5)$$

$$\circlearrowleft B) \quad mg \cdot r - mg(c+r) - D_y \cdot b = 0 \qquad (6)$$

(4) ... (6) ger $\begin{cases} D_x = mg(a-b-c)/a \\ D_y = -mg\frac{c}{b} \end{cases}$

<u>Svar:</u>

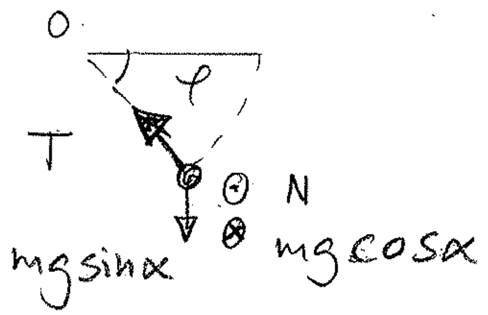
$$N = mg(b+c+r)/3a$$

$$F_E = mg\sqrt{1 + \frac{(b+c+r)^2}{9a^2}}$$

$$F_D = mg\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + \frac{(a-b-c)^2}{a^2}}$$

4) Frilägg partikeln

$\alpha = 30°$; $\sin\alpha = \frac{1}{2}$



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\nwarrow$ $T - mg\sin\alpha \sin\varphi = m\frac{v^2}{L}$

$$T = m\frac{v^2}{L} + \frac{1}{2}mg\sin\varphi$$

Bestäm $v^2(\varphi)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g$

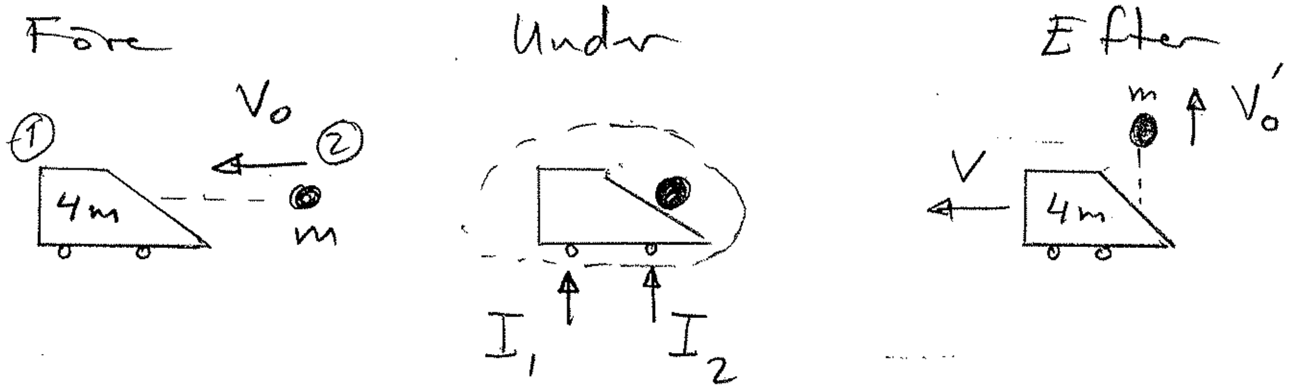
$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh \quad \text{där} \quad h = L\sin\varphi \sin\alpha$$

dvs $v^2(\varphi) = 2gL \cdot \frac{1}{2}\sin\varphi = gL\sin\varphi$

$$T(\varphi) = mg\sin\varphi + \frac{1}{2}mg\sin\varphi$$

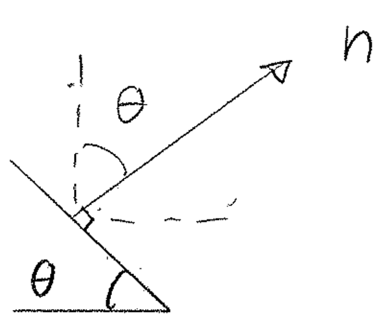
<u>Svar:</u> $\boxed{T = \frac{3}{2}mg\sin\varphi}$

5) $\bar{I}_s = \bar{p}_2 - \bar{p}_1$ for systemet



$\leftarrow \quad 0 = 4mV - mV_0 \qquad (1)$

stötalet $e = \dfrac{V_{2n}' - V_{1n}'}{V_{1n} - V_{2n}}$



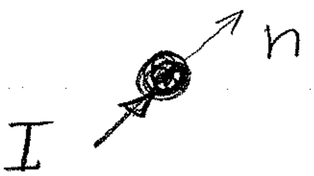
$$e = \frac{V_0' \cos\theta - (-V \sin\theta)}{0 - (-V_0 \sin\theta)}$$

$$e = \frac{V_0' \cos\theta + V \sin\theta}{V_0 \sin\theta} \qquad (2)$$

(1), (2) ger med $\theta = 30°$, $e = \frac{3}{4}$

$\underline{\underline{V = \frac{1}{4} V_0}}$; $\underline{\underline{V_0' = \frac{V_0}{2\sqrt{3}}}}$

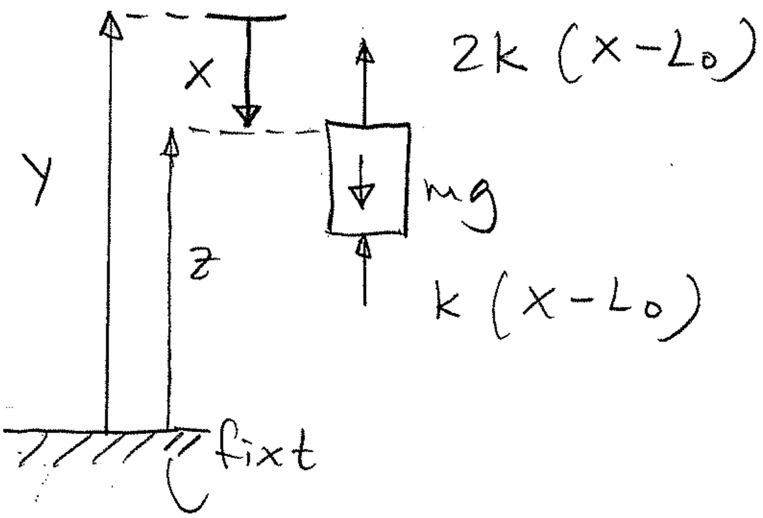
Frilägg bollen ; $\bar{I}_s = \bar{p}_2 - \bar{p}_1$ i n-riktn. ger



$I = m V_0' \cos\theta - (-m V_0 \sin\theta)$

$\underline{\underline{I = \frac{3}{4} m V_0}}$

6) Frilägg vikten



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\uparrow \quad 3k(x-L_0) - mg = m\ddot{z}$

men $z = y - x$; $\ddot{z} = \ddot{y} - \ddot{x}$, $\ddot{y} = a_0$

$3k(x-L_0) - mg = m(a_0 - \ddot{x})$

$\ddot{x} + \frac{3k}{m}x = g + a_0 + \frac{3k}{m}L_0$ har lösn.

$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{m(g+a_0)}{3k} + L_0$

B.V. $t=0$ $x = L_0$, $\dot{x} = 0$ ger

$A = -m(g+a_0)/3k$

$B = 0$

Således: $x(t) = \frac{m(g+a_0)}{3k}(1-\cos\omega_n t) + L_0$; $\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

$\tau = 2\pi/\omega_n$