Tentamen i Mekanik del 1 för Y

TMME12

2008-12-13, kl 08-12

Tentasal: U1, U3, U4, T1

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43
(Besöker salarna ca 9.00 och 10.30)

Kursadministratör: Elisabeth Peterson, Tel. 28 24 42,
email elisabeth.peterson@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivningstillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

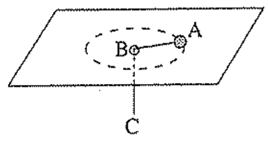
Betygsgränser: 5 = 12-15
4 = 9-11
3 = 6-8
1 = 0-5 (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 6

Tentamen i Mekanik del 1 för Y 2008-12-13

Teoridel:

1)
En partikel, som befinner sig på ett glatt horisontellt bord, är fäst i ett snöre som löper genom ett litet hål i bordet. Partikeln rör sig från början med hastigheten v_0 i en cirkelbana med radien r_0. Genom att försiktigt dra i snöret minskas radien till en ny cirkelbana med radien r_1 och hastigheten blir då v_1. Partikelns massa är m.



a) Utgå från impulsmomentekvationen och visa att följande gäller

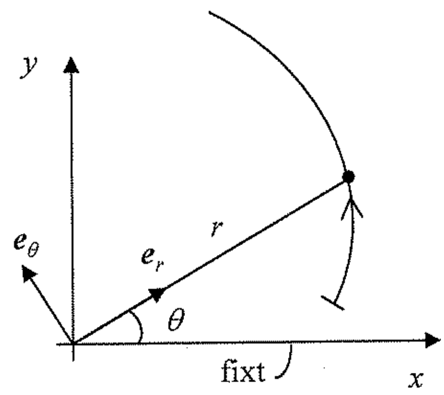
$$r_0 v_0 = r_1 v_1$$

(1p)

b) Hur stort arbete uträttar snörkraften på partikeln under radieminskningen ovan

(1p)

2)
En partikels bana i polära koordinater ges av $r = r(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där t är tiden, se figur.



Sambandet mellan de polära riktningarna e_r, e_θ och de fixa kartesiska riktningarna e_x, e_y lyder som bekant

$$e_r = \cos\theta\, e_x + \sin\theta\, e_y$$
$$e_\theta = -\sin\theta\, e_x + \cos\theta\, e_y$$

Visa att partikelns hastighet v i polära koordinater kan skrivas

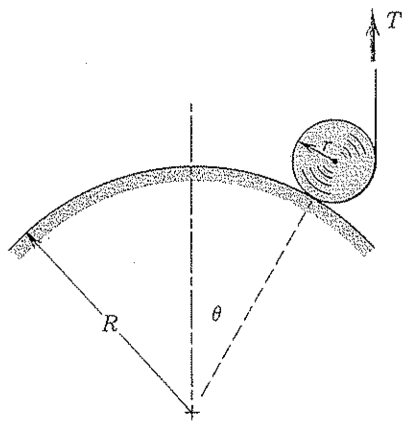
$$v = \dot{r}\, e_r + r\dot{\theta}\, e_\theta$$

(1p)

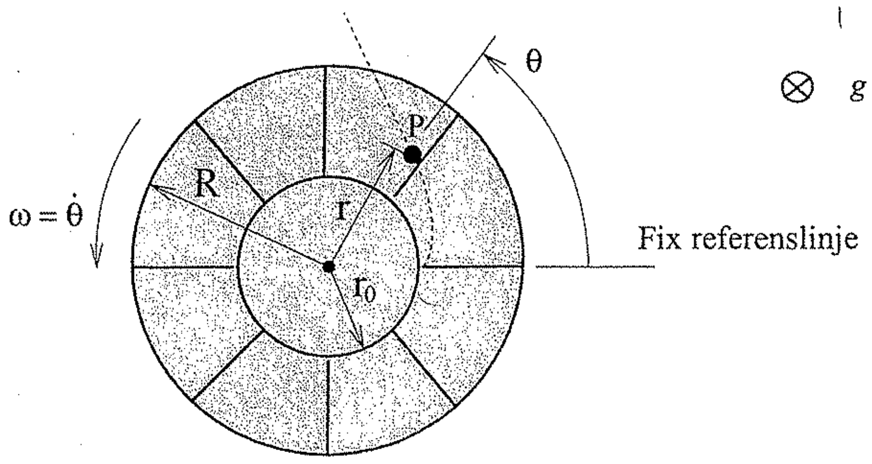
Tentamen i Mekanik del 1 för Y 2008-12-13

Problemdel:

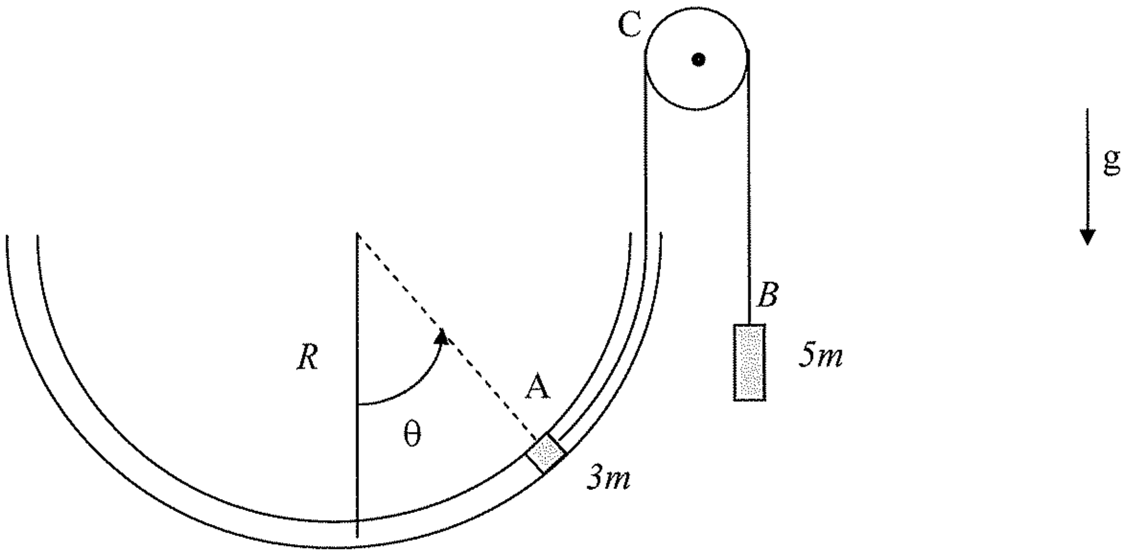
3)
En rulle med massan m och radie r är placerad på ett strävt cirkulärcylindriskt skal med radien R enligt figur. För att hålla rullen i jämvikt är ett vertikalt snöre fäst i rullens periferi. Beräkna dragkraften T i snöret samt normal och friktionskraften vid kontaktpunkten med underlaget då jämvikt råder för en given vinkel θ. Kan rullen befinna sig i fortvarig vila om $\theta=\pi/4$ och friktionskoefficienten $\mu_s=1/2$? (3p)



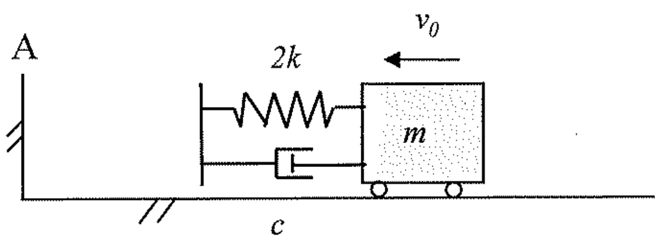
4)
En centrifugalpump med glatta skovlar i radiell led roterar kring sin vertikalaxel med konstant vinkelhastighet $\dot{\theta}=\omega$. En partikel P med massan m rör sig utåt längs med en skovel och startar utan radiell hastighetskomponent vid $r=r_0$. Bestäm storleken på normalkraften från skoveln på partikeln som funktion av r. Försumma all friktion. Svaret skall utryckas i m, ω, r_0 samt variablen r. (3p)



5)
Två partiklar A och B med massan $3m$ respektive $5m$ är förbundna med ett otänjbart snöre som löper över en fix glatt trissa vid C enligt figur. Partikeln A kan friktionsfritt glida i ett fixt halvcirkelformat rör med medelradien R. Hela anordningen befinner sig i ett och samma vertikalplan. Snöret inuti röret följer det halvcirkelformade rörets medellinje och C är rakt ovanför rörets utlopp. Systemet startas utan hastighet då vinkeln $\theta=0$ och får sedan röra sig fritt. Beräkna normalkraften från röret på partikel A som funktion av θ. Studera enbart intervallet $0 \le \theta < \pi/2$. (3p)



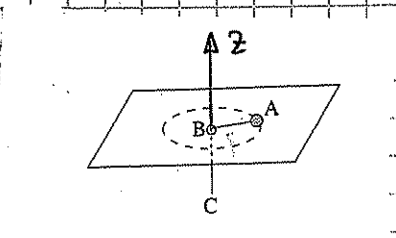
6)
En vagn med massan m är försedd med ett dämpsystem bestående av en fjäder med fjäderkonstanten $2k$ och en dämpare med dämpkonstanten $c = 2\sqrt{2km}$. Vagnen har hastigheten v_0 då dämpsystemet kommer i kontakt med den fixa väggen vid A.
a) Beräkna fjäderns längd som funktion av tiden t under det tidsintervall dämpsystemet är i kontakt med väggen (låt $t=0$ då kontakten med väggen startar) (2p)
b) Vid vilken tidpunkt upphör kontakten med väggen ? (1p)



Lösningar Mekanik del 1, TMME12

2008-12-13

1 a) $\int_{t_1}^{t_2} \bar{M}_B \, dt = \bar{h}_{B_2} - \bar{h}_{B_1}$; $\bar{h}_B = \bar{r} \times m\bar{v}$



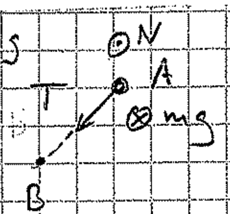
M.a.p. z-axeln genom B är

$M_{Bz} = 0 \quad \forall t$, dvs

$0 = h_{B_2 z} - h_{B_1 z}$ eller

$0 = m r_1 v_1 - m r_0 v_0$

Frilägg



Således: $\underline{\underline{r_0 v_0 = r_1 v_1}}$

1 b) Arbetet fås ur Lagen om den kinetiska energin $U_T = \Delta T$ där

$U_T = \int_{1}^{2} \bar{T} \cdot d\bar{r}$ ($m\bar{g}$ och $\bar{N}$ uträttar inget arbete)

Således: Arbetet är $\underline{\underline{\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2}}$

2) $\bar{r} = r\bar{e}_r$

$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r$

Men $\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y$

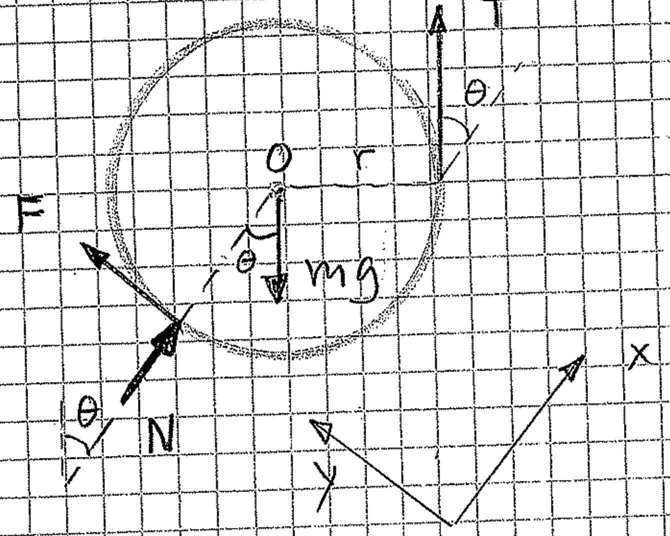
$\dot{\bar{e}}_r = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}\bar{e}_x + \cos\theta\cdot\dot{\theta}\bar{e}_y$

$\dot{\bar{e}}_r = \underbrace{(-\sin\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y)}_{\bar{e}_\theta}\dot{\theta}$

$\dot{\bar{e}}_r = \dot{\theta}\bar{e}_\theta$

Således: $\underline{\underline{\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta}}$

3) Frilägg



$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ ger

$$N - mg\cos\theta + T\cos\theta = 0 \quad (1)$$

$$F - mg\sin\theta + T\sin\theta = 0 \quad (2)$$

$\Sigma M_z = 0$ ger

$$O: \quad T \cdot r - F \cdot r = 0 \quad (3)$$

(1), (2), (3) ger

$$T = mg\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta} \; ; \quad F = mg\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$N = mg\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

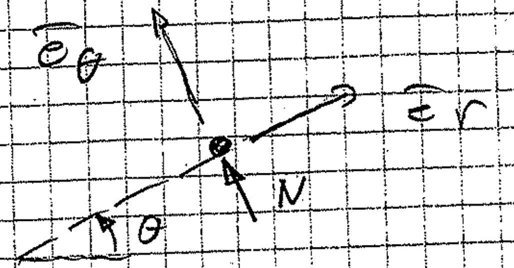
Friktionsvillkoret $\frac{|F|}{|N|} \leq \mu_s$ ger villkoret $\tan\theta \leq \mu_s$

Med $\theta = \frac{\pi}{4}$ och $\mu_s = \frac{1}{2}$ är villkoret ej uppfyllt, dvs glidning sker.

[redacted]

4)

Frilägg (enbart krafter i rörelseplanet ritas ut)



$\dot{\theta} = \omega = \text{konst.}$

$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$$

$$0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$N = m(0 + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{r} = r\omega^2 \quad (1)$$

$$N = 2m\omega\dot{r} \quad (2)$$

Vi har $\ddot{r} = \dfrac{d\dot{r}}{dt} = \dfrac{d\dot{r}}{dr} \cdot \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d\dot{r}}{dr}\dot{r}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{r}\,dr = \dot{r}\,d\dot{r}$$

(1) ger $\int r\omega^2\,dr = \int \dot{r}\,d\dot{r}$

$\Rightarrow \quad \omega^2 \dfrac{r^2}{2} = \dfrac{\dot{r}^2}{2} + C_1$, men $\dot{r} = 0$ då $r = r_0$

$\Rightarrow \quad C_1 = \dfrac{r_0^2}{2}\omega^2$ Således $\dot{r}(r) = \omega\sqrt{r^2 - r_0^2}$

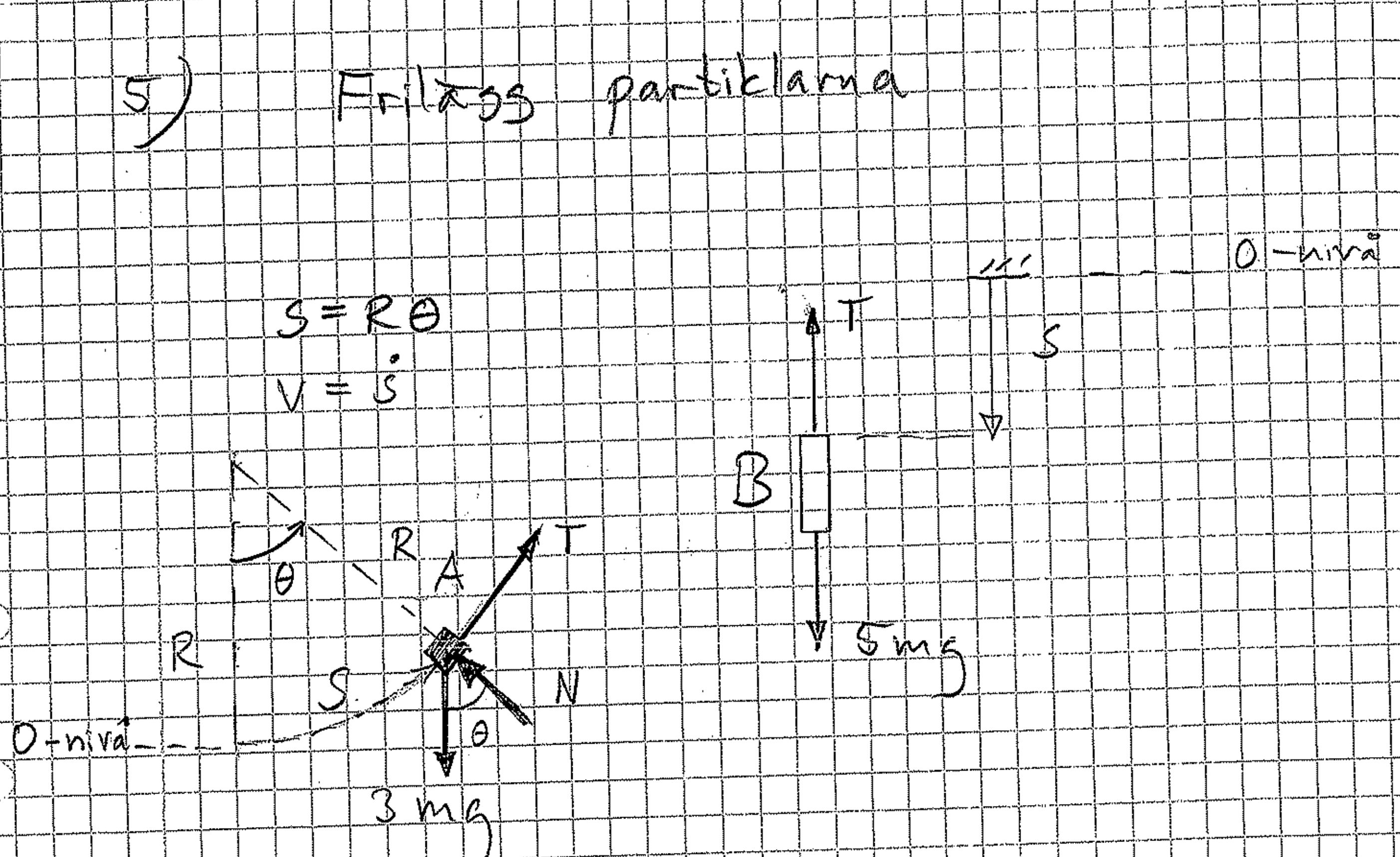
$$(2) \Rightarrow \quad N = 2m\omega^2\sqrt{r^2 - r_0^2}$$

Svar: $N(r) = 2m\omega^2\sqrt{r^2 - r_0^2}$

5) Frilägg partiklarna

$S = R\theta$

$V = \dot{S}$



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

A: ↗ $T - 3mg\sin\theta = 3m\ddot{S}$ (1)

↖ $N - 3mg\cos\theta = 3m\dfrac{V^2}{R}$ (2)

B: ↓ $5mg - T = 5m\ddot{S}$ (3)

(2) ger $N = 3mg\cos\theta + 3m\dfrac{V^2}{R}$

Bestäm $V^2(\theta)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g$ för systemet

$$0 = \frac{1}{2}3mV^2 + \frac{1}{2}5mV^2 + 3mgR(1-\cos\theta) - 5mgR\theta$$

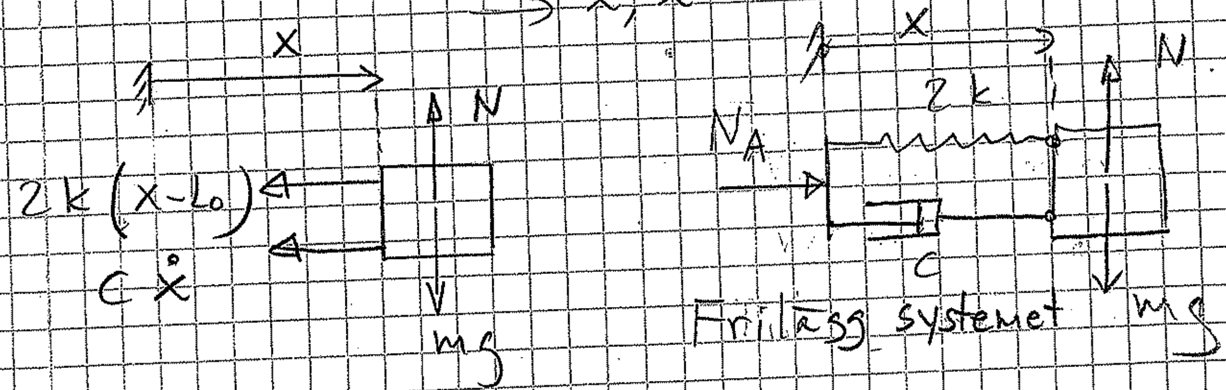
ger $V^2 = \dfrac{gR}{4}(5\theta + 3\cos\theta - 3)$

$$\underline{\underline{N(\theta) = \frac{3}{4}mg(5\theta + 7\cos\theta - 3)}}$$

b) Friläggs vagnen (x = fjäderns längd)

L_0 = ospänd längd

$\longrightarrow \dot{x}, \ddot{x}$



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ för vagnen ger

$\longrightarrow \quad -2k(x-L_0) - c\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2k}{m}L_0 \qquad (1)$$

Ident. ger $\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n \; ; \; \frac{2k}{m} = \omega_n^2$

med $c = 2\sqrt{2km}$ fås $\zeta = 1$ (kritiskt dämpat)

(1) har då lösningen

$$x(t) = (A+Bt)e^{-\omega_n t} + L_0 \; , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

B.V. $t=0$ $\begin{cases} x = L_0 & \text{ger } A = 0 \\ \dot{x} = -V_0 & \text{ger } B = -V_0 \end{cases}$

a) Således: $\underline{x(t) = L_0 - V_0 \cdot t\, e^{-\omega_n t}}$; $\underline{\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ för systemet ger

$\longrightarrow \quad N_A = m\ddot{x} \quad (2)$

Vid kontakt med vässen är $N_A > 0$.

Vid gränsfallet $N_A = 0$ upphör kontakten.

(2) ger $N_A = m V_0 w_n e^{-w_n t} (2 - w_n t)$

Således $N_A = 0$ då $t = \frac{2}{w_n}$

b) Kontakten upphör vid $\underline{\underline{t = \frac{2}{w_n}}}$

där $w_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$