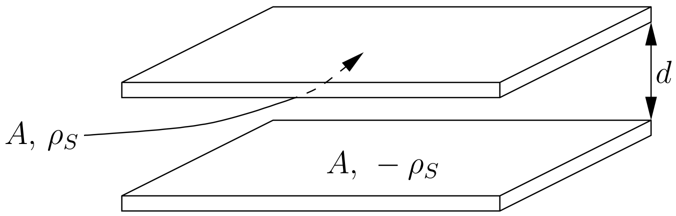
Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

Datum för tentamen	2013-10-23
Sal	TER1
Tid	8 – 13
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	7
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013 - 28 1893
Besöker salen ca kl.	9:30 och 11:30
Kursadministratör (namn + tfnnr + mailadress)	Karin Bogg 013 - 28 1229 karbo@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt	Betyg: 8-11 poäng 3, 12-15 poäng 4, 16-20 poäng 5 Elektromagnetism sommarkurs (TFYA61): Bonuspoäng steg 1 ger 1 poäng på denna tentamen Bonuspoäng steg 2 ger 2 poäng på denna tentamen Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: `http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13`
Antal exemplar i påsen	

1. Den här uppgiften består av två helt fristående deluppgifter.

   (a) Två mycket stora plattor med arean A vardera är belagda med varsin konstant ytladdningstäthet ρ_s respektive $-\rho_s$ på deras motstående sidor. Avståndet mellan plattorna, d, är mycket mindre än plattornas utsträckning. Plattornas elektriska egenskaper kan approximeras som luft, dvs med relativ dielektricitetskonstant $\varepsilon_r = 1$ och ledningsförmåga $\sigma = 0$. Härled ett uttryck för den kraft med vilken den ena plattan påverkar den andra. Av dina uträkningar ska det tydligt framgå om kraften blir attraktiv eller repulsiv. (2p)



   (b) För att beräkna ett värde på elektronens så kallade klassiska radie r_0 gör vi följande modell. Antag att elektronen är en sfär med radie r_0 som roterar med vinkelfrekvensen ω och har all sin laddning q jämt fördelad över *sfärens yta*. Antag vidare att den elektrostatiska energin och den magnetostatiska energin är lika stora samt att de tillsammans utgör elektronens viloenergi. Som bekant är viloenergin relaterad till vilomassan genom Einstein's berömda ekvation $E = mc^2$ där E i vårt fall är elektronens viloenergi, m är elektronens vilomassa och c är ljushastigheten i vakuum. Härled ett numeriskt värde på elektronens klassiska radie. (2p)

2. Området mellan två ledande sfärer med radie a och b ($b > a$) är fyllt med ett inhomogent dielektrikum med relativ dielektricitetskonstant,

$$\varepsilon_r = \frac{1}{1 + Kr},$$

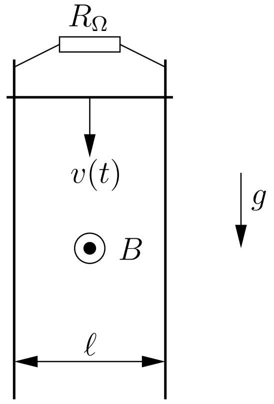
   där K är en konstant och r radien i sfäriska koordinater. Inre sfären har laddningen Q och den yttre är jordad.

   (a) Beräkna kapacitans, C, mellan sfärerna. (2p)

   (b) Beräkna polarisationsladdningstätheten, ρ_p, mellan sfärerna. (1p)

   (c) Beräkna ytpolarisationsladdningstätheten, ρ_{sp}, vid $r = a$ och $r = b$. (1p)

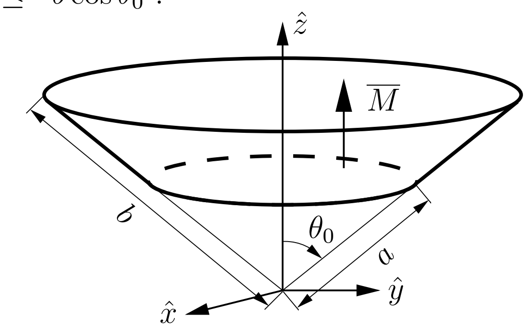
3. En horisontell ledande tråd med längd ℓ och massa m faller i ett gravitationsfält g. Den fallande tråden är ansluten till en resistans med hjälp av två glidkontakter, en i varsin ända av tråden, så att en sluten krets bildas med resistansen R_Ω. Vinkelrätt mot den fallande tråden finns ett horisontellt homogent magnetfält med belopp B.



Antag att tråden släpps från vila och beräkna trådens hastighet som funktion av tiden, $v(t)$. (4p)

4. Figuren nedan visar en permanentmagnet som innehåller en konstant magnetisering $\overline{M} = M\hat{z}$. Magneten har formen av en stympad kon, dvs det magnetiserade området definieras av:

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & \leq & \theta & \leq & \theta_0 \\
0 & \leq & \phi & \leq & 2\pi \\
a\cos\theta_0 & \leq & z & \leq & b\cos\theta_0 \ .
\end{array}
$$



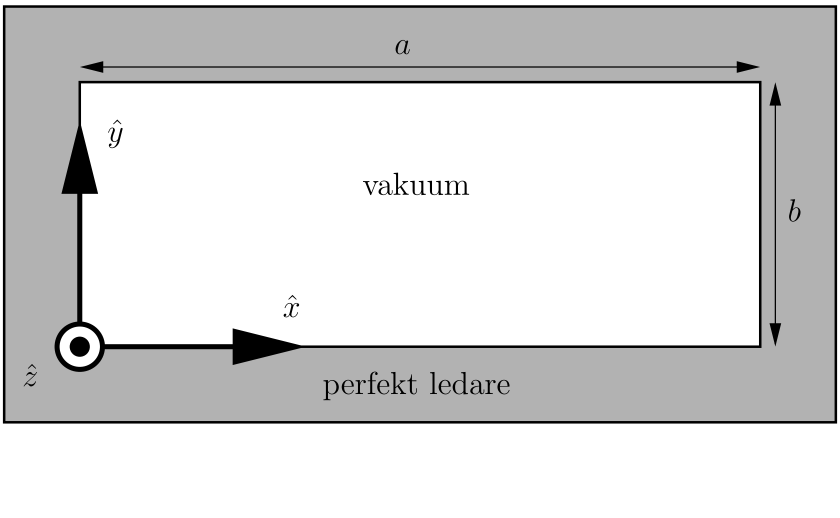
Om konen inte varit stympad skulle konens spets alltså legat i origo. Det omgivande mediet är vakuum. Beräkna den magnetiska flödestätheten $\overline{B}$ i det kartesiska koordinatsystemets origo. (4p)

5. Nedanstående uttryck och figur beskriver fältbilden i en så kallad $\mathbf{TE}_{n0}$-mod i en rektangulär vågledare. **TE** utläses *transversell elektrisk*. Fältbilden utbreder sig i z-riktningen medan E-fältet enbart har komposant i y-riktningen. (Index n anger som bekant ett heltal och index 0 markerar platsen för ett annat heltal m. Vi nöjer oss dock med specialfallet $m = 0$.) Vågledaren består av ett långt rör, z-riktningen, med rektangulärt tvärsnitt som illustreras i figuren. Fältbilden föreligger inom den inre rektangeln med sidorna a och b. I detta hålrum har vi vakuum. Vågledarens väggar utgörs av en *perfekt* metall. Till denna idealisering hör att *alla fält*, $\overline{E}, \overline{D}, \overline{B}$ och $\overline{H}$, tänks vara *nollvektorer* inuti metallmaterialet. För att Maxwells ekvationer skall gå ihop måste vi därför få *ytladdningstätheter* och *ytströmtätheter* i metallens ytskikt – det ytskikt som gränsar mot det hålrum där fältbilden föreligger.

$$
\begin{aligned}
E_y &= E_0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(k_z z - \omega t\right) \\
B_x &= -\left(\frac{E_0}{\omega}\right) \cdot k_z \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(k_z z - \omega t\right) \\
B_z &= -\left(\frac{E_0}{\omega}\right) \cdot \left(\frac{n\pi}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(k_z z - \omega t\right)
\end{aligned}
$$

(a) Beräkna ett uttryck för *ytströmtätheten* $\overline{J_S}$ i planet $x = 0$. (2p)

(b) För att Maxwells ekvationer skall vara uppfyllda i själva hålrummet kan k_z och ω inte vara oberoende av varandra. Vilket samband måste gälla? Observera att sambandet $\omega/k_z = c_0$ (= ljushastigheten i vakuum) inte med nödvändighet är rätt i detta fall. Inget hindrar att $\omega/k_z > c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ i detta fall. (2p)



Lycka till!

FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \,, \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0 \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}$, $\quad \nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}}$, $\quad \overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}}$, $\quad$ Poyntingvektor: $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$

$$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}} \right) \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}} \,, \qquad \overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 \, r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0 \, \overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \, m}{4\pi r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\quad \overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk spänning: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}} \right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x + (x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + (x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x + (x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\,\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$\overline{\mathrm{A}} \cdot (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\overline{\mathrm{C}} \times \overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{C}} \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}})$

$\overline{\mathrm{A}} \times (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{C}}) - \overline{\mathrm{C}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f$

$\nabla \cdot (f\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \nabla f$

$\nabla \times (f\,\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \times \overline{\mathrm{A}} + \nabla f \times \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) - \overline{\mathrm{A}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$

$\nabla \times (\nabla V) = \overline{0}$

$\nabla \times (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = \nabla(\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}}) - \nabla^2\overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = 0$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

Cartesiska koordinater (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

<u>Cylindriska koordinater</u> (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

<u>Sfäriska koordinater</u> (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} \;=\;& \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ & \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$