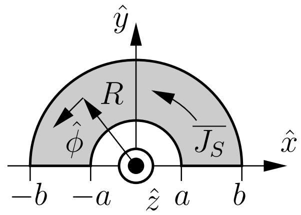
Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

Datum för tentamen	2013-08-21
Sal	TER1
Tid	14 – 19
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	6
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013 - 28 1893
Besöker salen ca kl.	15:30 och 17:30
Kursadministratör (namn + tfnnr + mailadress)	Karin Bogg 013 - 28 1229 karbo@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt	Betyg: 8-11 poäng 3, 12-15 poäng 4, 16-20 poäng 5 Elektromagnetism sommarkurs (TFYA61): Bonuspoäng steg 1 ger 1 poäng på denna tentamen Bonuspoäng steg 2 ger 2 poäng på denna tentamen Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: `http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13`
Antal exemplar i påsen	

1. En del av en strömförande krets består av en tunn metallfolie som skurits till i form av en plan halvcirkel med innerradia a och ytterradie b. Längs halvcirkeln går det en ytströmtäthet $\overline{J_S}(R) = J_0/R\ \hat{\phi}$ där J_0 är en konstant, R radien i cylinderkoordinater och $\hat{\phi}$ den vanliga enhetsvektorn associerad med vinkeln i cylinderkoordinater. Hela delen ligger i xy-planet. Se figur nedan.



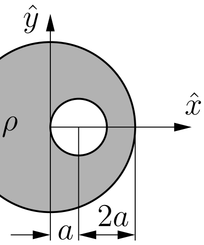
(a) Beräkna bidraget till den magnetiska vektorpotentialen, $\overline{A}$, i origo från den halvcirkelformade delen. (2p)

(b) Beräkna bidraget till den magnetiska flödestätheten, $\overline{B}$, i origo från den halvcirkelformade delen. (2p)

2. En sfärisk kondensator består av ett inre sfäriskt skal av metall med ytterradie a och ett koncentriskt yttre sfäriskt skal av metall med innerradie $b > a$. Området mellan de sfäriska skalen är fyllt med ett inhomogent dielektrikum med ledningsförmåg $\sigma = 0$ och relativ dielektricitetskonstant $\varepsilon_r = \alpha\, r$ där α är en konstant och r är avståndet till de sfäriska skalens gemensamma centrum. Beräkna hur stort arbete som går åt för att ladda upp kondensatorn till spänningsskillnaden U mellan de sfäriska skalen om kondensatorn är oladdad från början. (4p)

3. En cirkulär ring gjord av en tunn ledande tråd faller fritt, med sitt plan horisontellt, i ett radiellt magnetfält. Ringens massa är m, dess resistans är R_Ω och dess radie är R_0. Den radiella magnetiska flödestätheten är B_0 på ringens radie. Dvs om z-axeln väljs vertikal uppåt och genom ringens centrum blir ringens normalriktning $\hat{z}$, magnetfältet $\overline{B} = B_0\hat{R}$ vid tråden och gravitationen g i negativ $\hat{z}$-riktning. Trådens radie antas vara mycket mindre än ringens radie. Beräkna ringens jämviktshastighet. (4p)

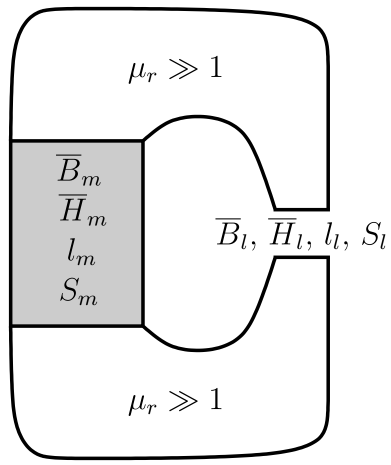
4. Figuren nedan illustrerar tvärsnittet av en oändligt lång laddningsfördelning med cirkulärt tvärsnitt som har ett oändligt långt coaxiellt hål med cirkulärt tvärsnitt. Cylinderns radie är $3a$. Det coaxiella hålets radie är a och dess symmetrilinje är på avståndet a från laddningstäthetens symmetrilinje. Laddningstätheten ρ är homogen. Såväl i hålet som utanför är det luft som ur elektriskt avseende kan betraktas som vakuum.



Beräkna elektriska fältstyrkan för varje punkt inuti det långa hålet. (4p)

5. Om man vill uppnå höga fältstyrkor med hjälp av permanentmagneter tvingas man använda exklusiva magnetiska material, som är både svåra att bearbeta och dyra. Av ekonomiska skäl väljer man därför vanligtvis en design där man använder minsta möjliga mängd av det exklusiva magnetiska materialet, i enklast tänkbara form, och leder sedan det magnetiska flödet genom magnetiska polskor av ett billigare material, med hög relativ permeabilitet μ_r, till det önskade luftgapet. Se figur nedan. Antag att man vill ha ett luftgap med längd $l_l = 0{,}5\,\text{cm}$, tvärsnittsarea $S_l = 4{,}0\,\text{cm}^2$ och magnetisk flödestäthet $B_l = 1{,}2\,\text{T}$. Vi gör de vanliga approximationerna för magnetiska kretsar och antar dessutom för enkelhets skull att $\mu_r \gg 1$ i polskorna så att $\int \overline{H}_p \cdot \overline{dl}$ längs de båda polskorna kan försummas i förhållande till $\int \overline{H}_l \cdot \overline{dl} = H_l l_l$ längs luftgapet. Beräkna längden l_m och arean S_m av det exklusiva magnetiska materialet så att dess volym $l_m S_m$ minimeras. Det exklusiva magnetiska materialets egenskaper beskrivs av tabellen nedan.

H_m [kA/m]	0	-20	-30	-35	-40	-45	-50	-60	-63
B_m [T]	1,11	1,09	1,08	1,04	0,98	0,88	0,74	0,31	0



(4p)

Lycka till!

FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho\ , \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t}\ , \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0\ , \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}$, $\nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}}$, $\overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}}$, Poyntingvektor: $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$

$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}}\right)$, $\nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}}$, $\overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p\, \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\ , \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\left(2\, \cos\theta\, \hat{r} + \sin\theta\, \hat{\theta}\right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0\, \overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2}\ , \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0\, m}{4\pi r^3}\left(2\, \cos\theta\, \hat{r} + \sin\theta\, \hat{\theta}\right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk kraft: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}}\right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t}\right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$\overline{\mathrm{A}} \cdot (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\overline{\mathrm{C}} \times \overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{C}} \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}})$

$\overline{\mathrm{A}} \times (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{C}}) - \overline{\mathrm{C}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f$

$\nabla \cdot (f\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \nabla f$

$\nabla \times (f\,\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \times \overline{\mathrm{A}} + \nabla f \times \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) - \overline{\mathrm{A}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$

$\nabla \times (\nabla V) = \overline{0}$

$\nabla \times (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = \nabla(\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}}) - \nabla^2 \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = 0$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

<u>Cartesiska koordinater</u> (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

<u>Cylindriska koordinater</u> (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

<u>Sfäriska koordinater</u> (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} \;\; = \;\; & \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ & \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$