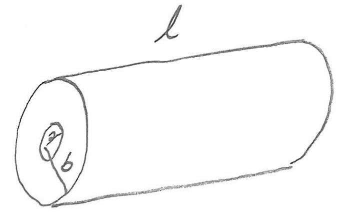
Elektromagnetism, TFYA13, 2013-05-30

1)



Cylinder symmetri $\Rightarrow \bar{J} = J(R)\hat{R}$

$I = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{S}$ på sylinder med radie

$a < R < b \Rightarrow I = J(R)\cdot 2\pi R l \Rightarrow$

$$\bar{J} = \frac{I}{2\pi l R}\hat{R} \Rightarrow \bar{E} = \bar{J}/\sigma_0 = \frac{I}{2\pi\sigma_0 l R}\hat{R}$$

$$\underline{\underline{U}} = \int_{Ref}^{Alt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_b^a -\frac{I}{2\pi\sigma_0 l R}\hat{R}\cdot\hat{R}\,dR = \underline{\underline{\frac{I}{2\pi\sigma_0 l}\ln(b/a)}}$$

b) $\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E} + \bar{P} \Rightarrow \bar{P} = \bar{D} - \varepsilon_0\bar{E}$; $\rho_p = -\bar{\nabla}\cdot\bar{P} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\rho_p}} = -\bar{\nabla}\cdot\bar{D} + \varepsilon_0\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = -\rho + \varepsilon_0\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\cdot\frac{I}{2\pi\sigma_0 l R}\right) = \underline{\underline{-\rho}}$$

Svar: a) Potentialskillnad $U = \frac{I}{2\pi\sigma_0 l}\ln(b/a)$

b) Kvoten $\rho/\rho_p = -1$

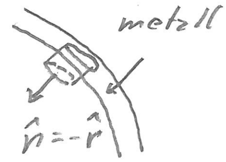
a) $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\bar{p}\cdot\hat{r}}{r^2} - \frac{\bar{p}\cdot\bar{r}}{a^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p\cos\theta}{r^2} - \frac{pr\cos\theta}{a^3}\right)$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{-2p\cos\theta}{r^3} - \frac{p\cos\theta}{a^3}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{-p\sin\theta}{r^2} + \frac{pr\sin\theta}{a^3}\right)\hat{\theta}\right]$$

; Precis innanför skalet, $r=a$:

$$\bar{E} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-3p\cos\theta}{a^3}\hat{r} + 0\hat{\theta}\right] = \frac{3p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{r}$$

$\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E} = \frac{3p\cos\theta}{4\pi a^3}\hat{r}$ Gausburk på insidan av skalet ger randvillkoret: $\rho_s = \bar{D}\cdot\hat{n}$



$$\underline{\underline{\rho_{s-} = \bar{D}\cdot(-\hat{r}) = \frac{-3p\cos\theta}{4\pi a^3}}}$$

b) Då $\cos\theta$ byter tecken vid $\theta=\pi/2$ och $0\le\theta\le\pi$ för en sfär ser vi att totala laddningen på insidan av skalet är noll. Man kan även motivera detta med att dipolens totala laddning är noll och $\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = 0$ om ytan S är i metallskalet.

Med noll laddning på insidan av skalet blir även laddningen på utsidan noll ty totalt var skalet oladdat.

Sfären är sfäriskt symmetrisk och därför måste även ρ_{s+} vara sfäriskt symmetrisk, dvs en konstant. Som måste vara noll för att ge noll totalt.

Svar: a) $\underline{\underline{\rho_{s-} = \frac{-3p\cos\theta}{4\pi a^3}}}$ b) $\underline{\underline{\rho_{s+} = 0}}$

3) Här har vi alltså bara polarisations laddningar:

$$\rho_p = -\bar{\nabla}\cdot\bar{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot rk) = -3k$$

Sfärisk symmetri $\Rightarrow \bar{E} = E(r)\hat{r}$

$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = Q_{innes}/\varepsilon_0$ (Där Q_{innes} är total innesluten laddning.)

$$\Rightarrow \bar{E}(r) = \frac{Q_{innes}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \; ; \; Q_{innes} = \begin{cases} -3k\cdot\frac{4\pi r^3}{3} & 0 \le r < a \\ 0 & a < r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\bar{E} = \begin{cases} -\frac{kr}{\varepsilon_0}\hat{r} & 0 \le r < a \\ \bar{0} & a < r \end{cases}$$

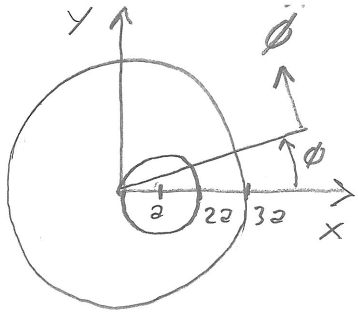
$$\underline{\underline{V(r)}} = \int_{Ref}^{Abt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_{\infty}^{r} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_{\infty}^{r} -\bar{0}\cdot d\bar{l} = \underline{\underline{0 \; ; \; a \le r}}$$

$$\underline{\underline{V(r)}} = \int_{Ref}^{Abt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = 0 + \int_{a}^{r} \frac{kr}{\varepsilon_0}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \underline{\underline{\frac{k}{2\varepsilon_0}(r^2 - a^2) \quad 0 \le r \le a}}$$

Svar: Potentialen är $V=0$ då $a \le r$ och

$\underline{\underline{V = \frac{k}{2\varepsilon_0}(r^2 - a^2) \text{ då } 0 \le r \le a}}$

4)



Betrakta ledaren som en med radie 3a och strömtäthet $\bar{J}_1 = J\hat{z}$ samt hålet som en med radie a och strömtäthet $\bar{J}_2 = -J\hat{z}$. Båda blir då cylindersymetriska.

Cirkulationssatsen $\oint \bar{H}\cdot d\bar{l} = I_{\text{oms.fri}} \Rightarrow \bar{H} = \dfrac{I_{\text{oms.fri}}}{2\pi R}\hat{\phi}$

$$\bar{H}_1 = \frac{I_{\text{oms.fri}}}{2\pi R_1}\hat{\phi}_1 = \frac{I_{\text{oms.fri}}}{2\pi R_1}\cdot\left(\frac{-y}{R_1}\hat{x} + \frac{x}{R_1}\hat{y}\right) = \frac{I_{\text{oms.fri}}}{2\pi R_1^2}(x\hat{y} - y\hat{x}) =$$

$$= \left\{ I_{\text{oms.fri}} = \begin{cases} J\pi R_1^2 & 0 \le R_1 \le 3a \\ J\pi(3a)^2 & 3a \le R_1 \end{cases} \right\} = \begin{cases} \dfrac{J}{2}(x\hat{y} - y\hat{x}) & 0 \le R_1 \le 3a \\ \dfrac{J 9a^2}{2R_1^2}(x\hat{y} - y\hat{x}) & 3a \le R_1 \end{cases}$$

P.s.s.

$$\bar{H}_2 = \begin{cases} -\dfrac{J}{2}\left[(x-a)\hat{y} - y\hat{x}\right] & 0 \le R_2 \le a \\ \dfrac{-Ja^2}{2R_2^2}\left[(x-a)\hat{y} - y\hat{x}\right] & a \le R_2 \end{cases}$$

Bestäm J: $I = \int \bar{J}\cdot d\bar{S} = J\pi[(3a)^2 - a^2] = J8\pi a^2$

$\Rightarrow J = I/8\pi a^2$

Använd $\bar{H} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2$

På xz-planet är $y = 0$.

<u>I hålet</u>: $\bar{H} = \dfrac{J}{2}(x\hat{y} - 0\hat{x}) - \dfrac{J}{2}\left[(x-a)\hat{y} - 0\hat{x}\right] = \dfrac{J}{2}a\hat{y} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\bar{B} = \mu_0\bar{H} = \frac{\mu_0 I}{16\pi a}\hat{y}}}$$

<u>I materialet</u>: $\bar{H} = \dfrac{J}{2}(x\hat{y} - 0\hat{x}) - \dfrac{Ja^2\left[(x-a)\hat{y} - 0\hat{x}\right]}{2\left[(x-a)^2 + 0^2\right]} =$

$$= \frac{J}{2}\frac{(x^2 - ax - a^2)}{(x-a)}\hat{y} \Rightarrow \underline{\underline{\bar{B} = \frac{\mu_0 I(x^2 - ax - a^2)}{16\pi a^2(x-a)}\hat{y}}}$$

4 forts Utanför ledaren: $\bar{H} = \dfrac{J 9a^2(x\hat{y} - 0\hat{x})}{2(x^2+0^2)} - \dfrac{J a^2[(x-a)\hat{y} - 0\hat{x}]}{2[(x-a)^2+0^2]}$

$$= \frac{J}{2}\left[\frac{9a^2}{x} - \frac{a^2}{(x-a)}\right]\hat{y} = \frac{J}{2}\frac{(8x-9a)a^2}{x(x-a)}\hat{y} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\bar{B} = \frac{\mu_0 I(8x-9a)}{16\pi x(x-a)}\hat{y}}}$$

P.S. Det vore enklare och kortare att direkt specialicera till en punkt i xz-planet. Men då kan man inte få fältet i en generell punkt eller t.ex. visa att fältet <u>överallt</u> i hålet är: $\bar{H} = \frac{J}{2}(x\hat{y} - y\hat{x}) - \frac{J}{2}[(x-a)\hat{y} - y\hat{x}] = \frac{J}{2}a\hat{y} \Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0 I}{16\pi a}\hat{y}$ ds.

Svar: I hålrummet: $\bar{B} = \dfrac{\mu_0 I}{16\pi a}\hat{y}$

I materialet: $\bar{B} = \dfrac{\mu_0 I(x^2 - ax - a^2)}{16\pi a^2(x-a)}\hat{y}$

Utanför: $\bar{B} = \dfrac{\mu_0 I(8x-9a)}{16\pi x(x-a)}\hat{y}$

5) a) $\bar{\nabla}\times\bar{H}=\bar{J}+\dfrac{\partial\bar{D}}{\partial t} \Rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{B}=\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{\partial\bar{E}}{\partial t}$

$$\bar{\nabla}\times\bar{B}=-\frac{\partial B_\phi}{\partial z}\hat{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(RB_\phi\right)\hat{z}=\frac{\mu_0\mu_r I_0 k}{R\ln(b/a)}\sin(kz-\omega t)\hat{R}+\bar{0}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\bar{E}=\frac{I_0 k\cos(kz-\omega t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega R\ln(b/a)}\hat{R}}}+\bar{0}$$

Tidsober. konst. satt till $\bar{0}$.

b) $$\bar{\nabla}\times\bar{E}=\frac{\partial E_R}{\partial z}\hat{\phi}=\frac{-I_0k^2\sin(kz-\omega t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega R\ln(b/a)}\hat{\phi}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}=$$

$$=\frac{-\mu_0\mu_r I_0\omega}{R\ln(b/a)}\sin(kz-\omega t)\hat{\phi}\Rightarrow\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{\omega}{k}=\pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}}}$$

c) $$\bar{P}=\bar{E}\times\bar{H}=\bar{E}\times\bar{B}/\mu_0\mu_r=\frac{I_0^2k\cos^2(kz-\omega t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega R^2(\ln[b/a])^2}\underbrace{\hat{R}\times\hat{\phi}}_{\hat{z}}$$

Tidsmedelvärde

$$\langle\bar{P}\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\bar{P}(t)\,dt=\frac{1}{2}\frac{I_0^2k}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega R^2(\ln[b/a])^2}\hat{z}$$

$$\underline{\underline{P}}=\int_S\langle\bar{P}\rangle\cdot d\bar{S}=\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\frac{I_0^2k\;R\,d\phi\,dR}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega\;R^2(\ln[b/a])^2}=$$

$$\underline{\underline{=\frac{\pi I_0^2k}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega\ln(b/a)}}}$$

Svar a) $\bar{E}=\dfrac{I_0k\cos(kz-\omega t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega R\ln(b/a)}\hat{R}$

b) $\omega/k=\pm1/\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}$

c) Transporterad effekt: $P=\dfrac{\pi I_0^2k}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega\ln(b/a)}$