Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

Datum för tentamen	2013-05-30
Sal	TER1 TER2
Tid	8 – 13
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	6
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013 - 28 1893
Besöker salen ca kl.	9:30 och 11:30
Kursadministratör (namn + tfnnr + mailadress)	Karin Bogg 013 - 28 1229 karbo@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt	Betyg: 8-11 poäng 3, 12-15 poäng 4, 16-20 poäng 5 Elektromagnetism sommarkurs (TFYA61): Bonuspoäng steg 1 ger 1 poäng på denna tentamen Bonuspoäng steg 2 ger 2 poäng på denna tentamen Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: `http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13`
Antal exemplar i påsen	

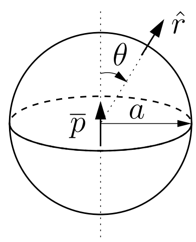
1. Mediet mellan två mycket långa koaxiella cylindriska metallskal har en ledningsförmåga σ_0 som är konstant i rummet. Mediets relativa dielektricitetskonstant ε_r varierar dock med avståndet från cylinderaxeln, R, enligt $\varepsilon_r = \alpha R$, där α är en konstant. Den inre cylindern har radie a och den yttre radie b. Den inre cylindern hålls på en högre potential än den yttre så att en strömtäthet flyter radiellt utåt. Om vi betraktar längden ℓ flyter en total ström I från inre mot yttre cylindern.

   (a) Beräkna ett uttryck för potentialskillnaden mellan inre och yttre metallcylindrarna uttryckt i de givna storheterna. (2p)

   (b) På grund av att materialet är inhomogent kommer det att finnas både fri laddningstäthet ρ och polarisationsladdningstäthet ρ_p i regionen $a < R < b$. Beräkna kvoten ρ/ρ_p. (2p)

2. Figuren nedan illustrerar ett tunt sfäriskt metallskal med radie a. I sfärens centrum finns en elektrisk dipol $\overline{p} = p\hat{z}$. Metallskalet, som är oladdat, gör att potentialen i området $r < a$ kommer att avvika från vad vi är vana vid i samband med elektriska dipoler. Potentialen blir:

$$V(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\overline{p}\cdot\hat{r}}{r^2} - \frac{\overline{p}\cdot\overline{r}}{a^3}\right].$$

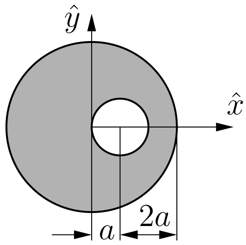


   (a) Härled ett uttryck för ytladdningstätheten av fria laddningar på metallskalets insida, ρ_{S-}. (2p)

   (b) Ange motsvarande ytladdningstäthet av fria laddningar på metallskalets utsida, ρ_{S+}, om det är vakuum överallt utanför skalet. Motivera svaret! (2p)

3. En sfär av ett ickelinjärt dielektriskt material med radie a är placerad med sitt centrum i origo i ett sfäriskt koordinatsystem. Sfären är polariserad så att polarisationen är $\overline{P} = k\,r\,\hat{r}$ där k är en konstant. Beräkna potentialen i hela rummet, dvs $V(r)$ för alla r, med potentialens referenspunkt i oändligheten. (4p)

4. Figuren nedan illustrerar tvärsnittet av en oändligt lång ledare med cirkulärt tvärsnitt och med ett oändligt långt coaxiellt hål med cirkulärt tvärsnitt. Cylinderns radie är $3a$. Det coaxiella hålets radie är a och dess symmetrilinje är på avståndet a från ledarens symmetrilinje. Totalt transporterar den solida delen av ledaren en ström I, jämt fördelad över tvärsnittsytan, ut ur papprets plan i figuren, $\hat{z}$.

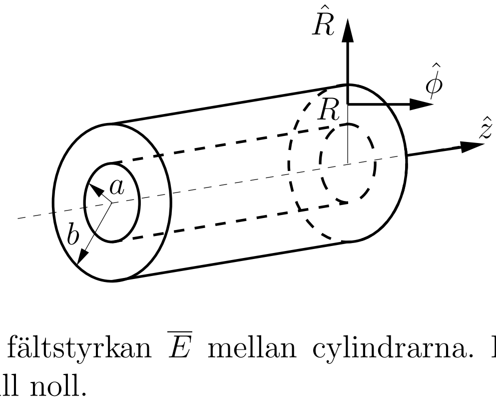


Beräkna magnetiska flödestätheten för varje punkt i planet som innehåller de båda cylindrarnas symmetriaxlar, xz-planet i figuren. (4p)

5. En mycket lång koaxialkabel består av en cylindrisk innerledare med ytterradie a och en koaxiell cylindrisk ytterledare med innerradie b. Båda cylindrarna antas vara perfekta ledare. Området mellan cylindrarna är fyllt med en isolator som beskrivs av en konstant relativ dielektricitetskonstant ε_r och en konstant relativ permeabilitet μ_r. Det magnetiska fältet mellan cylindrarna är:

$$\overline{B}(R,z,t) = \frac{\mu_0 \mu_r I_0}{R \ln(b/a)} \cos(kz - \omega t)\hat{\phi},$$

där k och ω är konstanter samt t är tiden. I_0 är en konstant relaterad till strömmens amplitud i koaxialkabeln.



(a) Sök den elektriska fältstyrkan $\overline{E}$ mellan cylindrarna. Eventuella tidsoberoende bidrag kan sättas till noll. (1p)

(b) Bestäm kvoten ω/k uttryckt i ε_0, ε_r, μ_0 och μ_r utgående från Maxwell's ekvationer. (1p)

(c) Beräkna tidsmedelvärdet av den i koaxialkabeln transporterade effekten. (2p)

Lycka till!

FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \,, \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0 \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}$, $\nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}}$, $\overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}}$, Poyntingvektor: $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$

$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}}\right)$, $\nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}}$, $\overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 \, r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta}\right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0 \, \overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \, m}{4\pi r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta}\right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk kraft: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}}\right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t}\right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\,\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$\overline{\mathrm{A}} \cdot (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\overline{\mathrm{C}} \times \overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{C}} \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}})$

$\overline{\mathrm{A}} \times (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{C}}) - \overline{\mathrm{C}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f$

$\nabla \cdot (f\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \nabla f$

$\nabla \times (f\,\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \times \overline{\mathrm{A}} + \nabla f \times \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) - \overline{\mathrm{A}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$

$\nabla \times (\nabla V) = \overline{0}$

$\nabla \times (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = \nabla(\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}}) - \nabla^2\overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = 0$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

<u>Cartesiska koordinater</u> (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cylindriska koordinater (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfäriska koordinater (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} \quad = \quad & \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ & \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$