Tentamen i Elektromagnetism, TFYA13, 2013-01-07

1) Elektriska komponenten kan t.ex. skrivas:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{E} = E_0 \sin(kz-\omega t)\hat{x} \\ \text{Maxwell: } \bar{\nabla}\times\bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t}\end{array}\right\} \quad \bar{\nabla}\times\bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y} = kE_0\cos(kz-\omega t)\hat{y}$$

Tidsober. konst. sätt $= \bar{0}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{B} = \frac{kE_0}{\omega}\sin(kz-\omega t)\hat{y} + \bar{B}_0}}$$

b) $\bar{\mathcal{P}} = \bar{E}\times\bar{H} = \bar{E}\times\bar{B}/\mu_0 = \dfrac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\sin^2(kz-\omega t)\hat{z}$

Tidsmedelvärdet blir: $\langle\bar{\mathcal{P}}\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \bar{\mathcal{P}}\,dt = \dfrac{1}{2}\dfrac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\hat{z}$

Ansätt arean A på solcellspanelen:

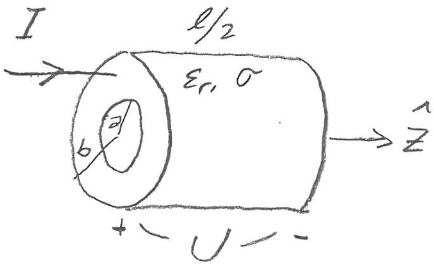
$$P_0 = A\cdot\frac{1}{2}\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cdot 0{,}14 \Rightarrow A = \frac{2P_0\,\omega\mu_0}{0.14\,kE_0^2} = \frac{2P_0\,c_0\mu_0}{0.14\,E_0^2} \approx 7{,}03\,m^2$$

Svar: a) $\underline{\underline{\bar{B} = \dfrac{kE_0}{\omega}\sin(kz-\omega t)\hat{y}}}$

b) Arean måste vara $\underline{\underline{\dfrac{2P_0\,\omega\mu_0}{0.14\,kE_0^2} \approx 7{,}0\,m^2}}$

---

2) Vid axiell ström kan man se hålcylindern som två seriekopplade motstånd. Räkna först på ett sådant.



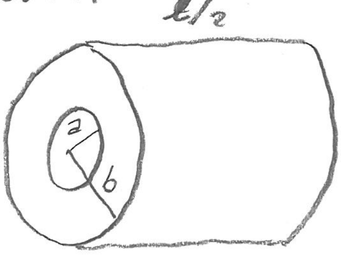
Ansätt: $\bar{E} = E\hat{z} \Rightarrow \bar{J} = \sigma E\hat{z}$

$$\left.\begin{array}{l} U = \displaystyle\int_{Ref}^{Ant} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = E\ell/2 \\ I = \displaystyle\int_S \bar{J}\cdot d\bar{S} = \sigma E\pi(b^2-a^2)\end{array}\right\} \Rightarrow R_\Omega = \frac{U}{I} = \frac{\ell}{2\sigma\pi(b^2-a^2)}$$

$$\therefore\; R_{ax} = \frac{\ell}{2\pi(b^2-a^2)}\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right) = \frac{\ell}{2\pi(b^2-a^2)}\cdot\frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sigma_1\cdot\sigma_2}$$

Vid radiell ström kan man se hålcylindern som två parallellkopplade motstånd. Räkna på en sådan del.

2 forts. $l/2$



Ansätt en ström från inre mot yttre cylindern, I, och strömtäthet $\bar{J} = J(R)\hat{R}$.

$$I = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} \Rightarrow I = J(R) \cdot 2\pi R l/2 \Rightarrow$$

$$\bar{J} = \frac{I}{\pi l R}\hat{R} \Rightarrow \bar{E} = \bar{J}/\sigma = \frac{I}{\pi \sigma l R}\hat{R} \Rightarrow$$

$$U = \int_{Ref}^{Alt} -\bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_b^a \frac{-I}{\pi \sigma l R}\hat{R} \cdot \hat{R}\, dR = \frac{I}{\pi \sigma l} \ln b/a \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_\Omega} = \frac{I}{U} = \frac{\pi \sigma l}{\ln b/a} \Rightarrow \frac{1}{R_{rad}} = \frac{\pi l}{\ln b/a}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$R_{ax} = R_{rad} \Rightarrow \frac{l}{2\pi(b^2 - a^2)} \cdot \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{\ln b/a}{\pi l(\sigma_1 + \sigma_2)} \Rightarrow$$

$$l = \frac{1}{(\sigma_1 + \sigma_2)}\sqrt{2\sigma_1\sigma_2(b^2 - a^2)\ln(b/a)}$$

Svar: Längden ska vara $l = \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2}\sqrt{2\sigma_1\sigma_2(b^2 - a^2)\ln(b/a)}$

---

3) Sätt upp momentjämvikt runt upphängningsaxeln för magnetiska och gravitations krafter.

Magnetiska: Bara kraften på undre sidan bidrar.

Kraft mha $d\bar{F} = I d\bar{l} \times \bar{B} \Rightarrow \bar{F}_m = IaB\hat{x}$.

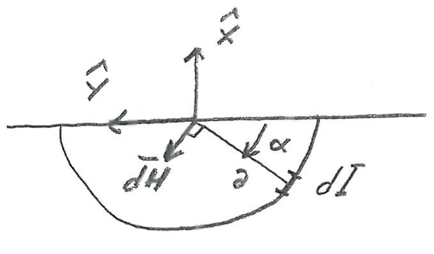
Moment $\bar{T} = \bar{r} \times \bar{F} \Rightarrow \bar{T}_m = a\cos\alpha \cdot IaB(-\hat{y}) = -Ia^2B\cos\alpha\,\hat{y}$

Gravitation: $\bar{T}_g = a\sin\alpha\, mg\hat{y} + 2\frac{a}{2}\sin\alpha\, mg\hat{y} = 2amg\sin\alpha\,\hat{y}$

$\bar{T}_m + \bar{T}_g = \bar{0} \Rightarrow Ia^2B\cos\alpha = 2amg\sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{IaB}{2mg}$

Svar: Vinkeln $\alpha = \arctan\left(\frac{aIB}{2mg}\right)$

4) Betrakta hängrännan som bestående av långa tunna parallella trådar med ström $dI = I\frac{d\alpha}{\pi}$. Varje sådan tråd kan ses som en oändligt lång tunn rät ledare som bara ger ett fält i "$\hat{\phi}$" led, och vars belopp bara beror av avståndet. Lös detta mha cirkulationssatsen $\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = I_{oms.}$



$$\Rightarrow 2\pi a\, dH = dI \Rightarrow d\bar{H} = \frac{1}{2\pi a}(-\cos\alpha\,\hat{x} + \sin\alpha\,\hat{y})\frac{I}{\pi}d\alpha \Rightarrow$$

$$\bar{H} = \int_0^\pi \frac{I}{2\pi^2 \alpha}(-\cos\alpha\,\hat{x} + \sin\alpha\,\hat{y})\,d\alpha = \frac{I}{2\pi^2\alpha}\Big[-\sin\alpha\,\hat{x} - \cos\alpha\,\hat{y}\Big]_0^\pi =$$

$$= \frac{I}{\pi^2 a}\hat{y} \Rightarrow \underline{\underline{\bar{B} = \mu_0\bar{H} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 a}\hat{y} \approx 42\hat{y}\ \mu T}}$$

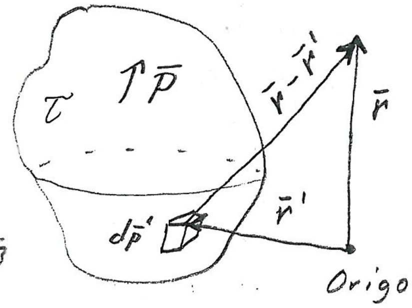
<u>Svar: Fältet blir $\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 a}\hat{y} \approx 42\hat{y}\ \mu T$</u>

---

5) Antag $\bar{P}$ känd i en volym τ.

Sök potentialen V_p orsakad av dessa dipoler.

$$V_p(\bar{r}) = \int_\tau \frac{(\bar{r}-\bar{r}')\cdot d\bar{p}'}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}'|^3} = \int_\tau \frac{(\bar{r}-\bar{r}')\cdot\bar{P}(\bar{r}')\,d\tau'}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$



Der m.a.p. $\bar{r}'$

<u>Trix 1:</u> $\bar{\nabla}'\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|} = \bar{\nabla}'\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = \frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$

$$\therefore\ V_p(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \bar{P}(\bar{r}')\cdot\bar{\nabla}'\left(\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\right)d\tau'$$

<u>Trix 2:</u> $\bar{\nabla}'\cdot(\psi\bar{A}) = (\bar{\nabla}'\psi)\cdot\bar{A} + \psi(\bar{\nabla}'\cdot\bar{A})$

$$\therefore\ V_p(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \bar{\nabla}'\cdot\left(\frac{\bar{P}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\right)d\tau' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\bar{\nabla}'\cdot\bar{P}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}d\tau'$$

Gauss sats på första integralen ger att

$$V_p(\bar{r}) = \oint_S \frac{[\bar{P}(\bar{r}')\cdot\hat{n}]}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}'|}dS' + \int_\tau \frac{[-\bar{\nabla}'\cdot\bar{P}(\bar{r}')]}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}'|}d\tau'$$

5, forts.

Jfr: Sök potentialen från

Polarisationsladdningstätheten $\varrho_p(\bar{r}') \equiv -\bar{\nabla}' \cdot \bar{P}(\bar{r}')$ $[C/m^3]$ i τ

och

Ytpolarisationsladdningstätheten $\varrho_{sp}(\bar{r}') \equiv \bar{P}(\bar{r}') \cdot \hat{n}$ $[C/m^2]$ på S

$$V_p(\bar{r}) = \oint_{S'} \frac{\varrho_{sp}(\bar{r}')\,dS'}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|} + \int_{\tau} \frac{\varrho_p(\bar{r}')\,d\tau'}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|} \quad ; \quad \begin{cases} \varrho_p \equiv -\bar{\nabla}\cdot\bar{P} \\ \varrho_{sp} \equiv \bar{P}\cdot\hat{n} \end{cases}$$

Svar: Se ovan.