Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

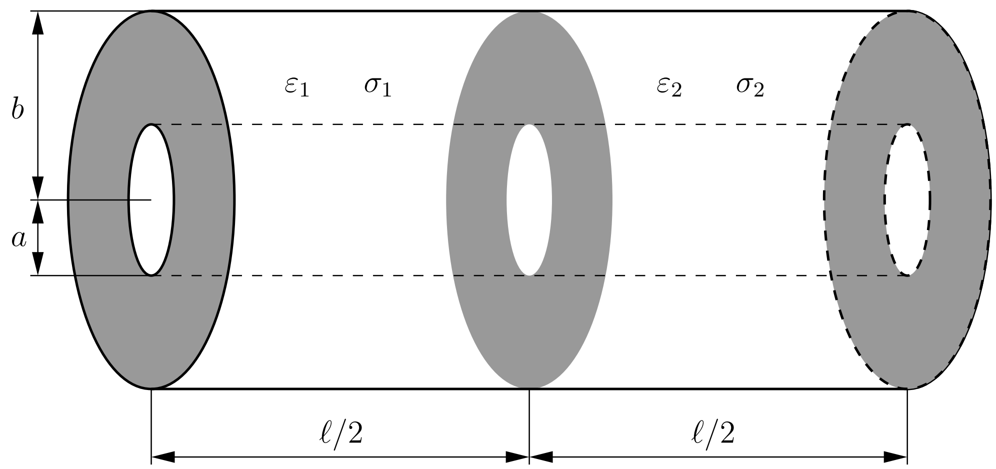
Datum för tentamen	2013-01-07
Sal	TER2 TER3
Tid	8 – 13
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	6
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013 - 28 1893
Besöker salen ca kl.	9:30 och 11:30
Kursadministratör (namn + tfnnr + mailadress)	Karin Bogg 013 - 28 1229 karbo@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt	Betyg: 8-11 poäng 3, 12-15 poäng 4, 16-20 poäng 5 Elektromagnetism sommarkurs (TFYA61): Bonuspoäng steg 1 ger 1 poäng på denna tentamen Bonuspoäng steg 2 ger 2 poäng på denna tentamen Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: `http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13`
Antal exemplar i påsen	

1. I den här uppgiften ska du hjälpa tekologen Yngve att göra en idealiserad räkning på en solcellspanel. Börja med att anta att det infallande ljuset kan ses som en monokromatisk plan transversell fortskridande elektromagnetisk våg i vakuum (luft). Antag att vågens vinkelfrekvens är ω, k-vektorn kan skrivas $k\hat{z}$ och att den elektriska komponent av vågen har amplitud $E_0\hat{x}$ i ett kartesiskt höger ON-koordinatsystem.

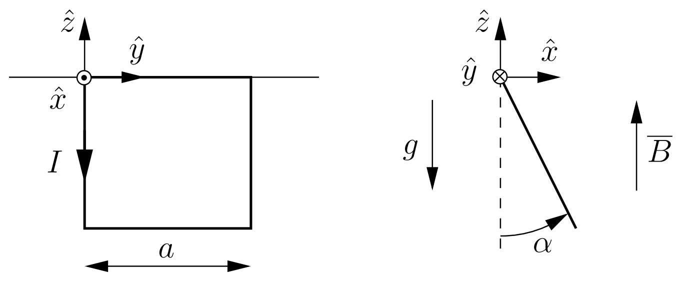
   (a) Härled ett analytiskt uttryck för vågens magnetiska komponent med hjälp av Maxwells fyra ekvationer. Eventuella tidsoberoende bidrag kan sättas till noll utan motivering. (2p)

   (b) Antag att Yngve vill installera en solcellspanel med en total uteffekt av 1 kW. Hur stor area måste panelen ha om Yngve orienterar den optimalt, planerar att använda polykrystallina solceller med en verkningsgrad av 14 % och $E_0 = 875\,\mathrm{V/m}$ är en bra approximation för det infallande solljuset en solig dag där Yngve bor? Din uppgift är att härleda ett yttryck utifrån Pointing vektorn och använda det. Att bara ta ett färdigt uttryck från Physics Handbook leder till poängavdrag. (2p)

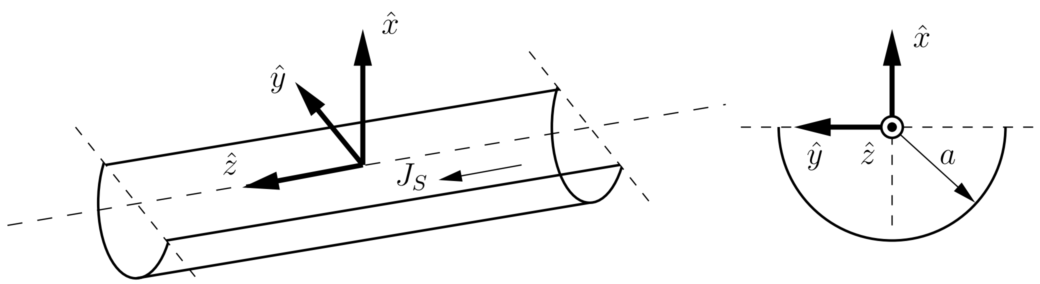
2. En hålcylinder har total längd ℓ, innerradie a och ytterradie b. Röret består av två lika stora delar, se figur nedan, med olika ledningsförmåga och dielektricitetskonstant. Vid ett tillfälle leds ström *axiellt* dvs från vänstra ändytan till den högra. Resistansen befinns då vara R_{ax}. Vid ett annat tillfälle leds ström från en inre metallcylinder, radie a, till en yttre, radie b, dvs strömmn leds *radiellt.* Resistansen blir nu R_{rad}. Nu visar det sig att $R_{ax} = R_{rad}$. Beräkna ett uttryck för hålcylinderns längd uttryckt i givna storheter. Röret kan betraktas som långt. (4p)



3. En kvadratisk slinga med kantlängd a för en ström I. Varje sida av kvadraten har massan m. I den övre kantens förlängning sitter två isolerade trådar som kvadraten är upphängd i vilket gör att den har möjlighet att vrida sig runt denna axel. Kvadraten befinner sig i ett konstant magnetfält $\overline{B} = B\hat{z}$ vilket gör att kvadraten bildar en vinkel α med z-axeln. Gravitationen är g i negativ $\hat{z}$-riktning. Bestäm vinkeln α. (4p)



4. För att avisa hängrännan på sitt hus skickar teknologen Ylva en likström på 20,0 A längs med rännan. Hängrännan är tillverkad av en tunn metallplåt som är böjd så att den bildar en halv cylinder med radien $a = 6{,}00\,\mathrm{cm}$. Vi inför ett koordinatsystem med z-axeln längs med cylinderaxeln i strömmens riktning. Strömmen antar vi är jämt fördelad över plåtens bredd, som alltså är πa. Vidare antar vi att rännan är mycket lång. Beräkna hur stor den magnetiska flödestätheten $\overline{B}$ blir i en punkt mellan rännans ändar på z-axeln. (Vi antar även att avståndet till närmaste ände är stort i förhållande till a.) (4p)



5. I den här uppgiften ska du härleda hur man kan representera en godtycklig volym τ med godtycklig polarisation $\overline{P}(\overline{r})$ med hjälp av polarisationsladdningar och ytpolarisationsladdningar. Det vill säga att volymen antingen kan beskrivas som små elektriska dipoler $\overline{p}d\tau$ i varje volymselement $d\tau$ eller som en polarisationsladdningstäthet ρ_p i varje volymselement $d\tau$ och en ytpolarisationsladdningstäthet ρ_{sp} på varje ytelement dS till τ. I uppgiften ingår att härleda uttrycken för polarisationsladdningstätheten ρ_p och ytpolarisationsladdningstätheten ρ_{sp}. Fält och potential på stort avstånd från en elektrisk dipol antas känt och behöver inte härledas. (4p)

Lycka till!

FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho\ , \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t}\ , \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0\ , \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}$, $\quad \nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}}$, $\quad \overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}}$, $\quad$ Poyntingvektor: $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$

$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}}\right)$, $\quad \nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}}$, $\quad \overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p\,\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\ , \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\left(2\,\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0\,\overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2}\ , \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0\, m}{4\pi r^3}\left(2\,\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\quad \overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk kraft: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}}\right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t}\right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\ \arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$$\overline{\mathrm{A}}\cdot(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\cdot(\overline{\mathrm{C}}\times\overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{C}}\cdot(\overline{\mathrm{A}}\times\overline{\mathrm{B}}) \qquad \overline{\mathrm{A}}\times(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{C}}) - \overline{\mathrm{C}}\,(\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}})$$

$$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f \qquad \nabla\cdot(f\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}}\cdot\nabla f$$

$$\nabla\times(f\,\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla\times\overline{\mathrm{A}} + \nabla f\times\overline{\mathrm{A}} \qquad \nabla\cdot(\overline{\mathrm{A}}\times\overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}}\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{A}}) - \overline{\mathrm{A}}\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{B}})$$

$$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V \qquad \nabla\times(\nabla V) = \overline{0}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\overline{\mathrm{A}}) = \nabla(\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}}) - \nabla^2\overline{\mathrm{A}} \qquad \nabla\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{A}}) = 0$$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

Cartesiska koordinater (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cylindriska koordinater (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfäriska koordinater (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} \;\; = \;\; & \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ & \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$