Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

Datum för tentamen	2012-08-15
Sal	TER2
Tid	8 – 13
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	6
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013 - 28 1893
Besöker salen ca kl.	9:30 och 11:30
Kursadministratör (namn + tfnnr + mailadress)	Karin Bogg 013 - 28 1229 karbo@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt	Betyg: 8-11 poäng 3, 12-15 poäng 4, 16-20 poäng 5 Elektromagnetism sommarkurs (TFYA61): Bonuspoäng steg 1 ger 1 poäng på denna tentamen Bonuspoäng steg 2 ger 2 poäng på denna tentamen Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: `http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13`
Antal exemplar i påsen	

1. En liten partikel med massa m och laddning q befinner sig i ett konstant magnetfält $\overline{B} = B_0\hat{z}$. Vid en viss tidpunkt, $t = 0$, har partikeln hastigheten $\overline{v} = v_{x0}\hat{x} + v_{z0}\hat{z}$. Om man förutom det magnetiska fältet även har ett elektriskt fält $\overline{E} = -E_0\hat{z}$ kan man få partikeln att komma tillbaka till samma punkt som den var vid vid tiden $t = 0$. Alla konstanter B_0, v_{x0} och v_{z0} är positiva.

   (a) Bestäm E_0, uttryckt i B_0, v_{x0} och v_{z0}, så att partikeln kommer tillbaka till samma punkt som den var vid vid tiden $t = 0$ efter att ha färdats så kort sträcka som möjligt. (3p)

   (b) Bestäm partikelns hastighet i detta ögonblick. (1p)

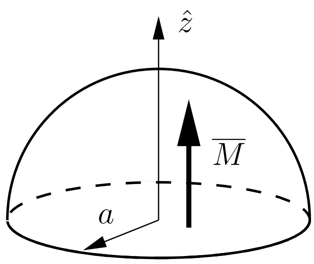
2. En laddningsfördelning ges i sfäriska koordinater av

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 a^5}{r(r^2 + a^2)^2}$$

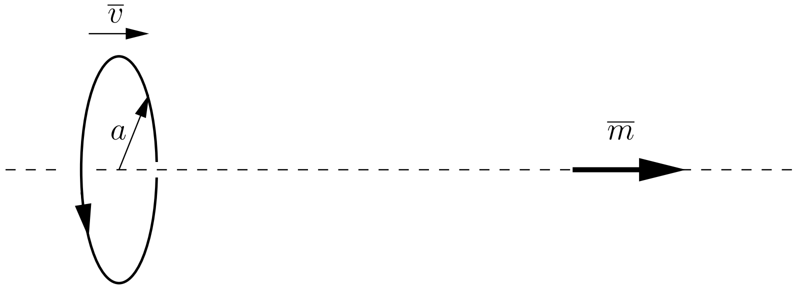
   där a är en konstant med dimension längd och ρ_0 är en konstant med dimension laddning/volymsenhet. Relativ dielektricitetskonstant, $\varepsilon_r = 1$ överallt. Beräkna potentialen $V(r)$ om referenspunkten är vald så att $V(r) \to 0$ då $r \to \infty$. Av fysikaliska skäl kräver vi att $\overline{E}$ är ändlig då $r \to 0$. Tips: Olika lösningsmetoder ger olika svår matematik. (4p)

3. Området mellan två koncentriska ledande sfärer är fyllt med ett material vars relativa dielektricitetskonstant $\varepsilon_r = 1$ och genomslagshållfasthet är E_{max}. Den yttre sfärens radie är b. Hur stor skall radien, a, hos den inre sfären vara för att man skall kunna lagra så stor elektrostatisk energi som möjligt i kondensatorn? (4p)

4. Figuren nedan illustrerar en permanentmagnet i form av ett halvklot. Magnetiseringen är $\overline{M} = M\hat{z}$ där M är en konstant i hela halvklotet. Beräkna den magnetiska flödestätheten $\overline{B}$ i origo (i centrum av halvklotets plana yta). Halvklotets radie är a. (4p)



5. En stor cirkulär slinga med radie a rör sig med konstant hastighet $\overline{v}$ mot och förbi en stationär magnetisk dipol $\overline{m}$. Det magnetiska dipolmomentet är placerat på och riktat längs slingans symmetriaxel. Slingans hastighet är längs symmetriaxeln. Dipolen kan betraktas som mycket liten i förhållande till slingans radie. Beräkna den maximala elektromotoriska spänning som induceras i slingan. Spänningen skall räknas positiv för positiv omlopsriktning i slingan relativt den magnetiska dipolens riktning. (4p)



Lycka till!

FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \,, \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0 \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}} \,, \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}} \,, \qquad \overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}} \,, \qquad \text{Poyntingvektor: } \overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$$

$$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}} \right) \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}} \,, \qquad \overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 \, r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0 \, \overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \, m}{4\pi r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\quad \overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk kraft: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}} \right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\,\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$\overline{\mathrm{A}} \cdot (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\overline{\mathrm{C}} \times \overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{C}} \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}})$

$\overline{\mathrm{A}} \times (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{C}}) - \overline{\mathrm{C}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f$

$\nabla \cdot (f\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \nabla f$

$\nabla \times (f\,\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \times \overline{\mathrm{A}} + \nabla f \times \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) - \overline{\mathrm{A}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$

$\nabla \times (\nabla V) = \overline{0}$

$\nabla \times (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = \nabla(\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}}) - \nabla^2 \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = 0$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

Cartesiska koordinater (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cylindriska koordinater (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfäriska koordinater (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} \quad = \quad & \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ & \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$