Tentamen i Elektromagnetism, TFYA13, 2012-05-28

1) Att laddningen kan anses vara sfäriskt symmetriskt fördelad på respektive sfär gör att de kan anses som oberoende av varandra. För en sfär med laddning $Q \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sfärisk sym: } \bar{E} = E(r)\hat{r} \\ \text{Gauss sats: } \oint \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{Q_{innes}}{\varepsilon_0}\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \Rightarrow$$

$$V(r) = \int_{Ref}^{Att} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_{\infty}^{a} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Ledande förbindelse ger att potentialen på de två sfärerna är lika $\Rightarrow$

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{a_1} = \frac{Q_2}{a_2} \Rightarrow Q_2 = \frac{a_2}{a_1}Q_1$$ vilket ger

med $Q = Q_1 + Q_2 = \left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right)Q_1 \Rightarrow \underline{\underline{Q_1 = \frac{a_1}{a_1+a_2}Q;\ Q_2 = \frac{a_2}{a_1+a_2}Q}}$

b) Enligt ovan är $\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ generellt vilket ger:

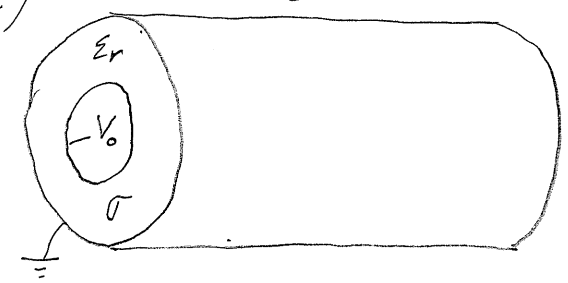
$$\underline{\underline{E_1}} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a_1^2} = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_1(a_1+a_2)}}};\quad \underline{\underline{E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_2(a_1+a_2)}}}$$

Svar: a) $\underline{\underline{Q_1 = \frac{a_1}{a_1+a_2}Q;\quad Q_2 = \frac{Q_2}{a_1+a_2}Q}}$

b) $\underline{\underline{E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_1(a_1+a_2)};\quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_2(a_1+a_2)}}}$

<u>där E_1 och E_2 är riktade längs $\hat{r}$ på resp. sfär.</u>

2)



Ansätt en ström I från inre cylindern mot yttre.

Cylinder sym: $\bar{J} = J(R)\hat{R}$

$I = \int \bar{J} \cdot d\bar{S}$ på cylindrisk yta mellan metall cyl. $\Rightarrow$

$$I = 2\pi R l \, J(R) \Rightarrow \bar{J} = \frac{I}{2\pi l R}\hat{R} \Rightarrow \bar{E} = \bar{J}/\sigma = \frac{I}{2\pi\sigma l R}\hat{R}$$

$$\Rightarrow \bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E} = \frac{\varepsilon_0 \alpha \cancel{R} I}{2\pi\sigma l \cancel{R}}\hat{R} = \frac{\varepsilon_0 \alpha I}{2\pi\sigma l}\hat{R}$$

$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q_{fri,innes}$ på en sluten yta som består av en cylinder precis utanför radien a och inne i den inre metall cylindern samt "lock" och "botten" cirkelringar.

$$\underbrace{\cancel{2\pi} a \cancel{l} \cdot \frac{\varepsilon_0 \alpha I}{\cancel{2\pi}\sigma \cancel{l}}}_{\text{Precis utanför a,}} + \underbrace{0 + 0 + 0}_{\text{i metall, lock o botten}} = Q_a \Rightarrow Q_a = \frac{\varepsilon_0 \alpha a}{\sigma} I$$

$$V_0 = \int_{Ref}^{Alt} -\bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_b^a -\frac{I}{2\pi\sigma l R}\hat{R}\cdot\hat{R}\, dR = \frac{I}{2\pi\sigma l}\ln(b/a) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{Q_a = \frac{2\pi\varepsilon_0 \alpha l a}{\ln(b/a)} V_0}}$$

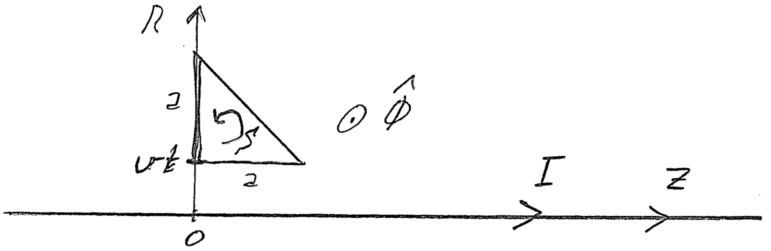
b) $\underline{\underline{R_\Omega = V_0 / I = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma l}}}$

Svar: a) Fri laddning på inre cyl. $Q_a = \frac{2\pi\varepsilon_0 \alpha a l}{\ln(b/a)} V_0$

b) Resistans mellan cyl. $R_\Omega = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma l}$

3) Symmetri m.m. ger $\bar{H} = H(R)\hat{\phi}$
Cirkulationssatsen $\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = I_{oms.fri}$ $\Rightarrow 2\pi R H(R) = I$

$$\Rightarrow \bar{H} = \frac{I}{2\pi R}\hat{\phi} \Rightarrow \bar{B} = \mu_0 \bar{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi}$$



$$\Phi = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{S} = \int_{vt}^{vt+a}\int_0^{a+vt-R} \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\, dz\, dR = \int_{vt}^{vt+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(a+vt-R)\, dR =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\Big[(a+vt)\ln R - R\Big]_{vt}^{vt+a} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{(a+vt)\ln\frac{vt+a}{vt} - a\right\} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{(a+vt)\ln\left(1+\frac{a}{vt}\right) - a\right\}$$

$$\mathcal{E}_{ems} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{v\ln\left(1+\frac{a}{vt}\right) + (a+vt)\frac{1}{\left(1+\frac{a}{vt}\right)}\cdot\frac{-a}{vt^2}\right\} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{v\ln\left(1+\frac{a}{vt}\right) - \frac{a}{t}\right\}$$

Svar: Inducerad elektromotoriskspänning:

$$\mathcal{E}_{ems} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\frac{a}{t} - v\ln\left(1 + a/vt\right)\right\}$$

4) Med referenspunkt i oändligheten ges potentialen från en punktladdning av: $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$. Med ett sfäriskt koordinatsystem med centrum i det matematiska skalet ges varje punkt av $\bar{r} = a\hat{r}$.

$$V(a\hat{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 |a\hat{r} - z_1\hat{z}|} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 |a\hat{r} - z_2\hat{z}|} =$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 |a\hat{r} - z_1\hat{z}|} + \frac{-a q_1}{4\pi\varepsilon_0 z_1 |a\hat{r} - \frac{a^2}{z_1}\hat{z}|} =$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{|a\hat{r} - z_1\hat{z}|} - \frac{1}{|z_1\hat{r} - a\hat{z}|}\right\} = 0 \quad \text{VSV}$$

b) Vi kan lika gärna räkna på kraften på q_1 från spegelladdningen q_2.

$$\bar{F}_{21} = \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^3} = \frac{q_1 \cdot \frac{-q_1 a}{z_1}\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 \left(z_1 - a^2/z_1\right)^2} =$$

av 2 på 1

$$= \frac{-a z_1 q_1^2 \hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 (z_1^2 - a^2)^2}$$

Svar a) Se ovan

b) Kraften blir attraktiv $\frac{a z_1 q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 (z_1^2 - a^2)^2}$

5, Magnetiseringen kan ses som magnetiseringsströmmar: $\bar{J}_{sm} = \bar{M} \times \hat{n}$ och $\bar{J}_m = \bar{\nabla} \times \bar{M}$

$$\bar{J}_{sm} = \bar{M}(r=a) \times \hat{r} = \bar{0} \times \hat{r} = \bar{0}$$

$$\bar{J}_m = \bar{\nabla} \times \bar{M} = \bar{\nabla} \times \{M_0(a-r)(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})\} =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rM_\theta) - \frac{\partial M_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi} = \frac{M_0}{r}\left[-(a-2r)\sin\theta + (a-r)\sin\theta\right]\hat{\phi} =$$

$$= M_0 \sin\theta\,\hat{\phi} \quad \text{i volymen} \quad r < a$$

Biot-Savarts lag

$$\bar{B}(\bar{0}) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 M_0 \sin\theta\,\hat{\phi} \times (\bar{0} - r\hat{r})}{4\pi |\bar{0} - r\hat{r}|^3} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr =$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\,\underbrace{\hat{\rho}}_{\Rightarrow \bar{0} \text{ ty } 0 \to 2\pi} - \sin\theta\,\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \cdot \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta(-\hat{\theta}) \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr =$$

$$= \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot a \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^3\theta}_{= \sin\theta(1-\cos^2\theta)} d\theta\,\hat{z} = \frac{\mu_0 M_0 a}{2}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \hat{z} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}\mu_0 M_0 a\,\hat{z}}}$$

Svar: $\bar{B} = \frac{2}{3}\mu_0 M_0 a \hat{z}$ i sfärens centrum.