Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

Datum för tentamen	2012-05-28
Sal	KÅRA T1 T2
Tid	8 – 13
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	6
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013 - 28 1893
Besöker salen ca kl.	9:30 och 11:30
Kursadministratör (namn + tfnnr + mailadress)	Karin Bogg 013 - 28 1229 karbo@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt	Betyg: 8-11 poäng 3, 12-15 poäng 4, 16-20 poäng 5 Elektromagnetism sommarkurs (TFYA61): Bonuspoäng steg 1 ger 1 poäng på denna tentamen Bonuspoäng steg 2 ger 2 poäng på denna tentamen Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: `http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13`
Antal exemplar i påsen	

1. Betrakta två ledande sfärer med radie a_1 respektive a_2, ($a_2 > a_1$), som är sammanbundna med en tunn ledande tråd. Avståndet mellan sfärerna är mycket stort jämfört med a_2. Då kan laddningen anses vara sfäriskt symmetriskt fördelad på respektive ledande sfär. Totala laddningen på de två sfärerna är Q.

   (a) Beräkna laddningarna Q_1 och Q_2, ($Q = Q_1 + Q_2$), som ligger på respektive sfär. (3p)

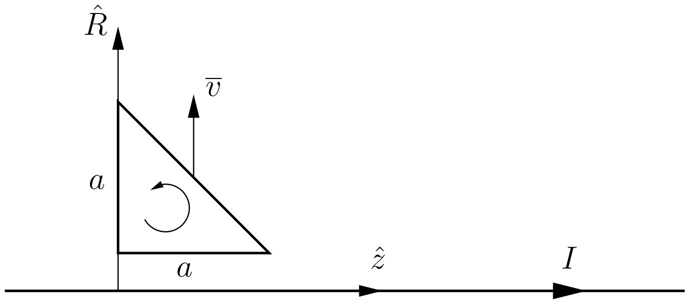
   (b) Beräkna elektriska fältstyrkan $\overline{E}_1$ och $\overline{E}_2$ precis utanför respektive sfär. (1p)

2. Mediet mellan två mycket långa koaxiella cylindriska metallskal har en ledningsförmåga σ som är konstant i rummet. Mediets relativa dielektricitetskonstant ε_r varierar dock med avståndet från cylinderaxeln R enligt $\varepsilon_r = \alpha R$, där α är en konstant. Den inre cylindern har radie a och den yttre radie b. Cylindrarnas längd är ℓ med $\ell \gg b$. Den inre cylindern hålls på en potential $V_0 > 0$ relativt den yttre.

   (a) Beräkna den totala fria laddningen Q_a som ligger på den inre cylindern. (2p)

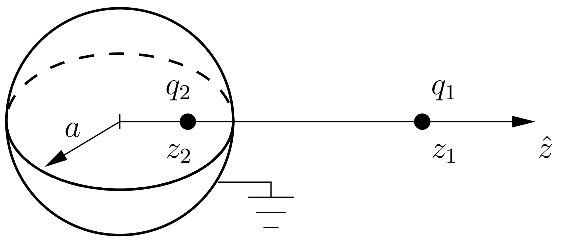
   (b) Beräkna resistansen, R_Ω, mellan cylindrarna. (2p)

3. Sök ett uttryck för den elektromotoriska spänning som induceras i slingan i nedanstående figur.



   Slingan utgörs av en halv kvadrat med sidolängd a. Både slingan och den oändliga räta ledaren ligger i papprets plan. Slingan avlägsnar sig från ledaren med den konstanta hastigheten $\overline{v}$. Rörelsen sker hela tiden i papprets plan. Vid $t = 0$ sammanföll den halva kvadratens undre kant med ledaren. Den oändliga räta ledaren för en tidsoberoende ström I. Både strömmen och den sökta elektromotoriska spänningen räknas positiva i de riktningar som angetts i figuren. (4p)

4. En punktladdning q_1 befinner sig på avståndet z_1 från centrum på ett sfäriskt metallskal. Metallskalet är jordat och har radien a. För att beräkna hur den inducerade laddningen fördelar sig på metallskalet är det lämpligt att använda spegelladdningsmetoden. Man tänker sig då att man ersätter metallskalet med en punktladdning q_2, som av symmetriskäl måste ligga på en linje mellan laddningen q_1 och skalets centrum. Avståndet från skalets centrum till laddningen q_2 kallar vi för z_2.



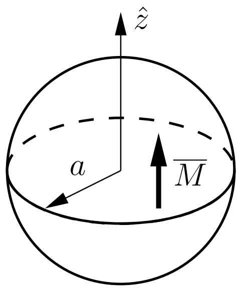
   (a) Visa nu att valet: $q_2 = -q_1 a/z_1$ och $z_2 = a^2/z_1$ gör att potentialen blir noll överallt på ett matematiskt sfäriskt skal med radien a och centrum där det borttagna metallskalet hade sitt centrum. (3p)

   (b) Beräkna kraften mellan q_1 och metallskalet. Ange även om den blir attraktiv eller repulsiv. (1p)

5. En permanentmagnet i form av en sfär, med radie a, har en magnetisering

$$\overline{M} = M_0(a - r)\hat{z}.$$

M_0 är en konstant och r är avståndet till sfärens centrum. Beräkna magnetiska flödestätheten $\overline{B}$ i sfärens centrum. (4p)



Lycka till!

FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \ , \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \ , \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0 \ , \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}$, $\quad \nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}}$, $\quad \overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}}$, $\quad$ Poyntingvektor: $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$

$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}} \right)$, $\quad \nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}}$, $\quad \overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \ , \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 \, r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0 \, \overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \ , \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \, m}{4\pi r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\quad \overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk kraft: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}} \right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x + (x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C}) = \overline{B}\cdot(\overline{C}\times\overline{A}) = \overline{C}\cdot(\overline{A}\times\overline{B})$

$\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C}) = \overline{B}\,(\overline{A}\cdot\overline{C}) - \overline{C}\,(\overline{A}\cdot\overline{B})$

$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f$

$\nabla\cdot(f\overline{A}) = f\,\nabla\cdot\overline{A} + \overline{A}\cdot\nabla f$

$\nabla\times(f\,\overline{A}) = f\,\nabla\times\overline{A} + \nabla f\times\overline{A}$

$\nabla\cdot(\overline{A}\times\overline{B}) = \overline{B}\cdot(\nabla\times\overline{A}) - \overline{A}\cdot(\nabla\times\overline{B})$

$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V$

$\nabla\times(\nabla V) = \overline{0}$

$\nabla\times(\nabla\times\overline{A}) = \nabla(\nabla\cdot\overline{A}) - \nabla^2\overline{A}$

$\nabla\cdot(\nabla\times\overline{A}) = 0$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

<u>Cartesiska koordinater</u> (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\overline{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cylindriska koordinater (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfäriska koordinater (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} \;&=\; \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ &\quad\; \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$