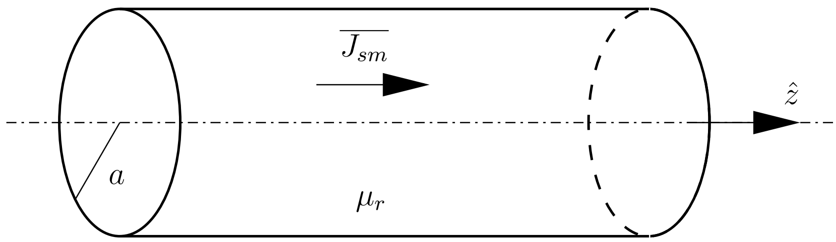
Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

Datum för tentamen	2011-08-17
Sal	TER2, TER3
Tid	8 – 13
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	6
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013 - 28 1893
Besöker salen ca kl.	9:30 och 11:30
Kursadministratör (namn + tfnnr + mailadress)	Agne Virsilaite Maras 013 - 28 1229 agnvi@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt	Betyg: 8-11 poäng 3, 12-15 poäng 4, 16-20 poäng 5 Elektromagnetism sommarkurs (TFYA61): Bonuspoäng steg 1 ger 1 poäng på denna tentamen Bonuspoäng steg 2 ger 2 poäng på denna tentamen Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13/
Antal exemplar i påsen	

1. Figuren nedan illustrerar en lång cylindrisk ledare med radien a. Den ledande cylinderns magnetiska egenskaper beskrivs av en konstant relativ permeabilitet $\mu_r > 1$. På cylinderns mantelyta vet man att ytmagnetiseringsströmtätheten är $\overline{J_{sm}} = J_{sm0}\hat{z}$, där $J_{sm0} > 0$ är en konstant med enheten [A/m]. Antag att den fria ström som går i ledaren är jämt fördelad över ledarens tvärsnittsyta. Beräkna beloppet av den fria strömmen. Ange även om den fria strömmen går i positiv eller negativ $\hat{z}$-riktning. (4p)



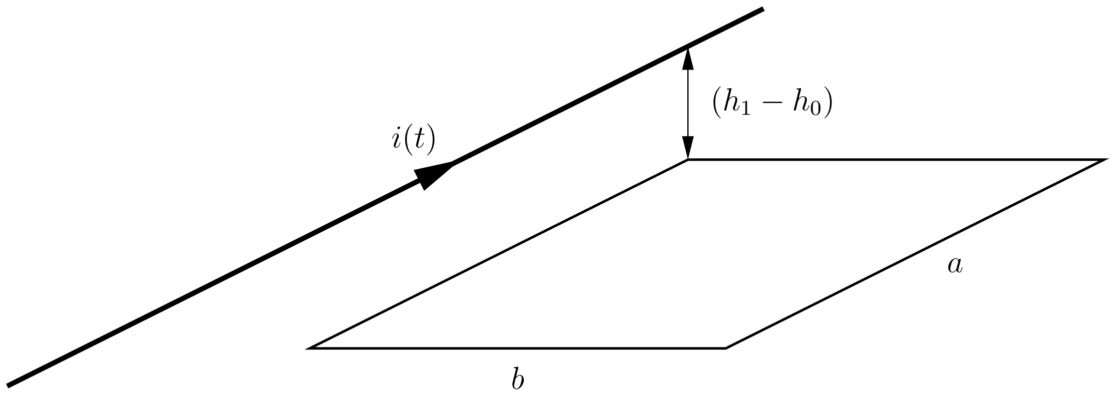
2. Området mellan två koncentriska tunna sfäriska metallskal med radie a respektive $b > a$ är fyllt med ett dielektrikum som har en konstant ledningsförmåga σ. Dielektrikumet har dock en relativ dielektricitetskonstant som varierar med radien, r, enligt $\varepsilon_r(r) = kr$ där k är en konstant med dimension 1/längd. Beräkna volymladdningstätheten, ρ_{fri}, av fria laddningar i dielektrikumet om inre sfärens potential är U relativt den yttre. (4p)

3. Strålningen från en oscillerande magnetisk dipol i origo kan på stort avstånd, r, approximeras med

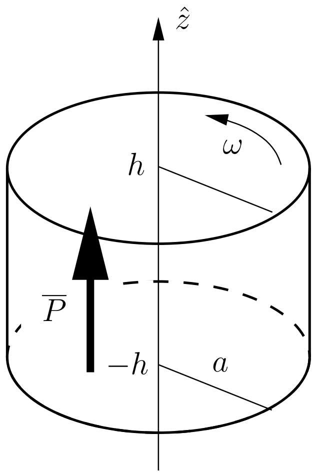
$$\overline{B} = \frac{V_0}{r}\frac{k}{\omega}\sin\theta\,\cos(\omega t - kr)\,\hat{\theta}\,,$$

där V_0 är en konstant. Sfäriska koordinater har använts och högre ordningens termer av $1/r$ har försummats. Att $\omega/k = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c_0 \equiv$ ljushastigheten i vakuum, behöver *ej* visas. Beräkna den totala momentana utstrålade effekten. (4p)

4. En nyutexaminerad nyanställd civilekonom på elkraftföretaget Vattenfall vill visa sig duktig. Han har kommit på att det blir en extra effektförlust i luftledningar när de passerar hagar med taggtrådsstaket. Innan han föreslår sin chef att man ska börja debitera bönderna för denna extra effektförlust ber han sin korridorkompis Y-teknologen Yngve att beräkna storleken på förlusten i ett typiskt fall. Yngve konstruerar då följande förenklade typproblem. Antag att man har en enkel oändligt lång rak luftledning på höjden $h_1 = 10{,}0\,\mathrm{m}$ över marken som för strömmen $i(t) = i_0 \sin(\omega\, t)$ där $i_0 = 100\,\mathrm{A}$ och $\omega = 2\pi \cdot 50{,}0\,\mathrm{Hz}$. Antag vidare att hagen är rektangulär med sidolängderna $a = 200\,\mathrm{m}$ och $b = 150\,\mathrm{m}$ samt att den har en enkel rak taggtråd på höjden $h_0 = 1{,}0\,\mathrm{m}$ över marken som bildar en sluten slinga. Hagen är placerad så att en av sidorna med längden a löper parallellt med och rakt under den strömförande ledaren. Se figur överst på nästa sida. Taggtråden är av stål med en ledningsförmåga $\sigma = 6{,}25 \cdot 10^6\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ och har tvärsnittsarean $S_0 = 4{,}00\,\mathrm{mm}^2$. Markens eventuella påverkan bortser Yngve från genom att anta att den har samma elektriska och magnetiska egenskaper som luft. Beräkna tidsmedelvärdet av effektförlusten på grund av hagen i Yngves förenklade typproblem och ge civilekonomen ett råd! (4p)



5. En elektret, det vill säga ett material med en polarisation $\overline{P}$ även utan något yttre elektriskt fält, har formen av en puck med höjden $2h$ och radien a. Elektreten har en konstant polarisation $\overline{P} = P\hat{z}$ riktad längs med symmetriaxeln, z-axeln, som den roterar runt i positiv riktning med vinkelfrekvensen ω. z-axelns nollställe har lagts i centrum på pucken. Materialets magnetiska egenskaper ges av relativa permeabiliteten $\mu_r = 1$.



(a) Beräkna magnetiska vektorpotentialen $\overline{A}(z)$ i en godtycklig punkt på z-axeln. (2p)

(b) Beräkna magnetiska flödestätheten $\overline{B}(z)$ i en godtycklig punkt på z-axeln. (2p)

Lycka till!

FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \ , \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \ , \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0 \ , \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}} \ , \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}} \ , \qquad \overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}} \ , \qquad \text{Poyntingvektor: } \ \overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$$

$$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}} \right) \ , \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}} \ , \qquad \overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \ , \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 \, r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0 \, \overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \ , \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \, m}{4\pi r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\quad \overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk kraft: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}} \right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\ \arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$\overline{\mathrm{A}}\cdot(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\cdot(\overline{\mathrm{C}}\times\overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{C}}\cdot(\overline{\mathrm{A}}\times\overline{\mathrm{B}})$ $\qquad$ $\overline{\mathrm{A}}\times(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{C}}) - \overline{\mathrm{C}}\,(\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}})$

$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f$ $\qquad$ $\nabla\cdot(f\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}}\cdot\nabla f$

$\nabla\times(f\,\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla\times\overline{\mathrm{A}} + \nabla f\times\overline{\mathrm{A}}$ $\qquad$ $\nabla\cdot(\overline{\mathrm{A}}\times\overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}}\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{A}}) - \overline{\mathrm{A}}\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{B}})$

$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V$ $\qquad$ $\nabla\times(\nabla V) = \overline{0}$

$\nabla\times(\nabla\times\overline{\mathrm{A}}) = \nabla(\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}}) - \nabla^2\overline{\mathrm{A}}$ $\qquad$ $\nabla\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{A}}) = 0$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

<u>Cartesiska koordinater</u> (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cylindriska koordinater (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfäriska koordinater (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} \;&=\; \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ &\quad \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$