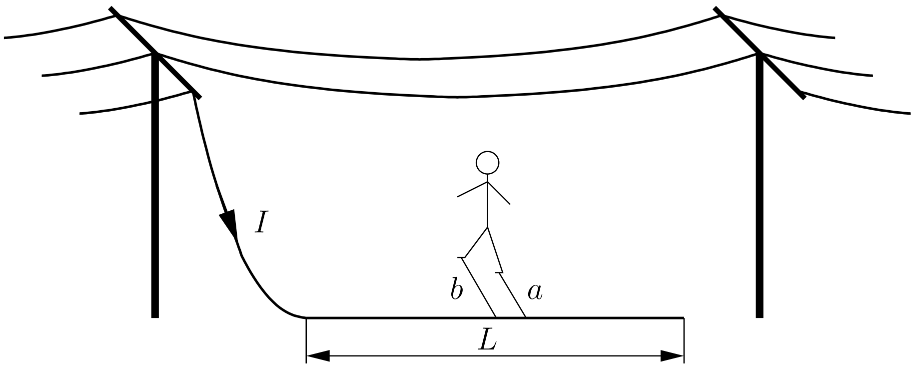
Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

(fylls i av ansvarig)

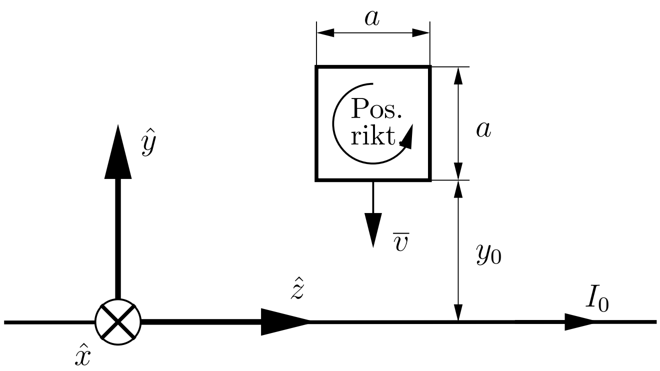
Datum för tentamen	2011-05-31
Sal	TERE, TER1, TER2
Tid	8 – 13
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	8
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013-28 1893
Besöker salen ca kl.	9:30 och 11:30
Kursadministratör **(namn + tfnnr + mailadress)**	Agne Virsilaite Maras 013-28 1229 agnvi@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av det sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt **(exempel när resultat kan ses på webben, betygsgränser, visning, övriga salar tentan går i m.m.)**	Betyg: 8–11 poäng 3, 12–15 poäng 4, 16–20 poäng 5 Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: `http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13/`

1. En av ledarna i en 10 kV trefas luftledning har gått av och ligger därför på marken. Vi är intresserade av om det är farligt att gå nära den nedfallna ledningen. För att beräkna det gör vi följande antaganden och idealiseringar. Antag att den nedfallna ledningen ligger rak och har kontakt med marken på en sträcka av $L = 10\,\mathrm{m}$. Antag att det går en ström med effektivvärdet $I = 500\,\mathrm{A}$ ut i jorden från den nedfallna ledningen. Antag att strömtätheten i marken nära ledningen fördelar sig ”cylinder symmetriskt” i en halvcylinder runt den nedfallna ledaren. Vidare antar vi att jordens ledningsförmåga är $\sigma = 0{,}01\,(\Omega\mathrm{m})^{-1}$. Beräkna effektivvärdet av spänningen mellan fötterna om man står med ena foten $a = 1\,\mathrm{m}$ från ledaren och med den andra $b = 2\,\mathrm{m}$ från ledaren. (4 p)
Annmärkning: 10 kV är en låg spänning för att vara en högspänningsledning och används i elnäten på korta avstånd nära små konsumenter av el. Den vanligaste typen i Sverige är på 110 kV.



2. En sfärisk kondensator består av ett inre sfäriskt skal av metall med ytterradie a och ett koncentriskt yttre sfäriskt skal av metall med innerradie $b > a$. Området mellan de sfäriska skalen är fyllt med ett inhomogent dielektrikum med ledningsförmåg $\sigma = 0$ och relativ dielektricitetskonstant $\varepsilon_r = \alpha/r$ där α är en konstant och r är avståndet till de sfäriska skalens gemensamma centrum. Beräkna hur stort arbete som går åt för att ladda upp kondensatorn till spänningsskillnaden U mellan de sfäriska skalen om kondensatorn är oladdad från början. (4 p)

3. Figuren nedan visar en kvadratisk slinga, sidlängd a, som rör sig med hastighet $\overline{v} = -v\hat{y}$ i riktning mot en oändligt lång rät ledare. Ledaren går längs z-axeln och för strömmen I_0 i positiv $\hat{z}$-riktning. Den räta ledaren och slingan ligger hela tiden i samma plan, yz-planet.



(a) Beräkna ett uttryck för den elektromotoriska kraft som induceras i slingan i det ögonblick då dess undersida är på avståndet y_0, ($y_0 > 0$), från z-axeln. Elektromotoriska kraften definieras positiv moturs i figuren ovan. (2 p)

(b) Slingan utgörs av en ledare med total resistans R_Ω och massa m. Elektromotoriska kraften kommer att driva en ström genom slingan, vilket medför att vi får en magnetisk kraft. Tyngdkraften är $-mg\hat{y}$. Beräkna hastigheten v så att vi får kraftjämvikt mellan magnetiska kraften och tyngdkraften i samma ögonblick som ovan. (Minsta lilla vridning av slingans plan ut ur yz-planet leder till magnetiska krafter som även vill vrida slingan mer ut ur yz-planet. Den givna orienteringen är en labil jämvikt. Vi förutsätter dock att slingan på något sätt tvingas vara kvar i yz-planet.) (2 p)

4. Betrakta en cirkulär ring med radie a som ligger i xy-planet med centrum i $(0, 0, 0)$ i ett kartesiskt koordinatsystem, där z-axeln är symmetriaxel. Ringen har linjeladdningstätheten $\rho_\ell = \rho_0 \sin\phi$, där ρ_0 är en positiv konstant och där ϕ är den vanliga vinkelkoordinaten, dvs $(0 \leq \phi \leq 2\pi)$.

a) Beräkna elektriska fältet, $\overline{E}$, i fältpunkten $(0, 0, z)$ på z-axeln. (2 p)

Eftersom linjeladdningstätheten ρ_ℓ är positiv i intervallet $(0 < \phi < \pi)$ och negativ i intervallet $(\pi < \phi < 2\pi)$ väntar man sig kanske intuitivt att ringen på stora avstånd $(|z| \gg a)$ längs z-axeln bör upplevas som en elektrisk dipol.

b) Om detta är sant bestäm ett uttryck för dipolmomentet för motsvarande dipol. Om detta inte är sant motivera varför detta är fallet. (2 p)

5. Maxwells ekvationer i vakuum har en mycket vacker symmetri:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \overline{E} &= 0 \\
\nabla \times \overline{E} &= -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \overline{B} &= 0 \\
\nabla \times \overline{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Om man ersätter $\overline{E}$ med $\overline{B}$ och $\overline{B}$ med $-\varepsilon_0\mu_0\overline{E}$ övergår det första paret av ekvationer i det andra paret av ekvationer. Denna symmetri mellan $\overline{E}$ och $\overline{B}$ blir emellertid bruten (förstörd) av en laddningsterm i Gauss lag och en strömterm i Amperes lag:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \overline{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e \\
\nabla \times \overline{E} &= -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \overline{B} &= 0 \\
\nabla \times \overline{B} &= \mu_0 \overline{J}_e + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Många har begrundat frågan om varför motsvarande kvantiteter 'saknas' för ekvationerna $\nabla \cdot \overline{B} = 0$ och $\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$. Antag att ekvationerna hade formen:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \overline{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e && (1) \\
\nabla \times \overline{E} &= -\mu_0 \overline{J}_m - \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} && (2) \\
\nabla \cdot \overline{B} &= \mu_0 \rho_m && (3) \\
\nabla \times \overline{B} &= \mu_0 \overline{J}_e + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}. && (4)
\end{aligned}
$$

Då skulle ρ_m representera densiteten av magnetisk 'laddning' och ρ_e representera densiteten av elektrisk laddning. Analogt skulle $\overline{J}_m$ representera strömmen av magnetisk 'laddning' och $\overline{J}_e$ representera strömmen av elektrisk laddning.

a) Visa huruvida kontinuitetsekvationen:

$$\nabla \cdot \overline{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

gäller i det magnetiska fallet. Jämför med räkningarna i det elektriska fallet. (1 p)

Det har hävdats att Maxwells ekvationer (1) – (4) med magnetisk laddning och ström inkluderade, är invarianta under en så kallad dualitetstransformation:

$$
\begin{aligned}
\overline{E}' &= \overline{E}\cos(\alpha) + c\overline{B}\sin(\alpha) && (5)\\
c\overline{B}' &= c\overline{B}\cos(\alpha) - \overline{E}\sin(\alpha) && (6)\\
cq_e' &= cq_e\cos(\alpha) + q_m\sin(\alpha) && (7)\\
q_m' &= q_m\cos(\alpha) - cq_e\sin(\alpha) && (8)\\
c\rho_e' &= c\rho_e\cos(\alpha) + \rho_m\sin(\alpha) && (9)\\
\rho_m' &= \rho_m\cos(\alpha) - c\rho_e\sin(\alpha) && (10)\\
c\overline{J}_e' &= c\overline{J}_e\cos(\alpha) + \overline{J}_m\sin(\alpha) && (11)\\
\overline{J}_m' &= \overline{J}_m\cos(\alpha) - c\overline{J}_e\sin(\alpha) && (12)
\end{aligned}
$$

där $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ och α är en godtycklig rotationsvinkel i '$\overline{E}$ - $\overline{B}$-rummet'. Detta betyder att laddnigstätheterna ρ_e och ρ_m och strömtätheterna $\overline{J_e}$ och $\overline{J_m}$ transformeras på samma sätt som laddningarna q_e och q_m.

b) Verifiera om ekvationerna (1) och (2) är invarianta under dualitetstransformationen, dvs om det är sant att:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \overline{E}' &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e' \\
\nabla \times \overline{E}' &= -\mu_0 \overline{J}_m' - \frac{\partial \overline{B}'}{\partial t}?
\end{aligned}
$$

(3 p)

Anmärkning: Sådan elektrisk/magnetisk dualitet har ett samband med Diracs studier av magnetiska monopoler 1931, där han visade kvantiseringsvillkoret:

$$q_e\, q_m = 2\pi\hbar n$$

där n är ett heltal. Senare visade 't Hooft och Polyakov 1974 att magnetiska monopoler verkligen existerar i varje storförenad teori (Grand Unified Theory, GUT). Begreppet dualitet har numera mycket hög aktualitet inom teorin för supersträngar.

Lycka till!

FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

<u>**Maxwells ekvationer:**</u>

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \,, \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0 \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}$, $\quad \nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}}$, $\quad \overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}}$, $\quad$ Poyntingvektor: $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$

$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}} \right)$, $\quad \nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}}$, $\quad \overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 \, r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0 \, \overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \, m}{4\pi r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\quad \overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk kraft: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}} \right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\ \arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$\overline{\mathrm{A}} \cdot (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\overline{\mathrm{C}} \times \overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{C}} \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}})$

$\overline{\mathrm{A}} \times (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{C}}) - \overline{\mathrm{C}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f$

$\nabla \cdot (f\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \nabla f$

$\nabla \times (f\,\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \times \overline{\mathrm{A}} + \nabla f \times \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) - \overline{\mathrm{A}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$

$\nabla \times (\nabla V) = \overline{0}$

$\nabla \times (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = \nabla(\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}}) - \nabla^2 \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = 0$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

Cartesiska koordinater (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cylindriska koordinater (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfäriska koordinater (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} \quad = \quad & \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ & \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$