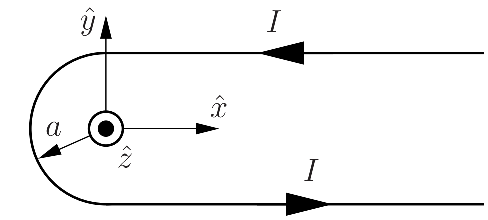
Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

	(fylls i av ansvarig)
Datum för tentamen	2011-01-14
Sal	TER3
Tid	8 – 13
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	7
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013-28 1893
Besöker salen ca kl.	9:30 och 11:30
Kursadministratör (namn + tfnnr + mailadress)	Agne Virsilaite Maras 013-28 1229 agnvi@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av de tre sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt (exempel när resultat kan ses på webben, betygsgränser, visning, övriga salar tentan går i m.m.)	Betyg: 8–11 poäng 3, 12–15 poäng 4, 16–20 poäng 5 Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: `http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13/`

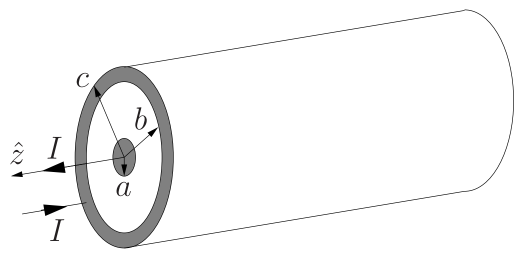
1. En hårnålsformad tunn ledares parallella skänklar är mycket långa och befinner sig på avståndet $2a$ från varandra. (Se figur nedan.) Skänklarna är förenade av en halvcirkelformad del med centrum i origo. Hela ledaren befinner sig i xy-planet och för strömmen I.



   (a) Beräkna bidraget till den magnetiska vektorpotentialen, $\overline{A}$, i origo från den halvcirkelformade delen av hårnålen. (2p)

   (b) Beräkna bidraget till den magnetiska flödestätheten, $\overline{B}$, i origo från den halvcirkelformade delen av hårnålen. (2p)

2. En mycket lång koaxialkabel består av en cylindrisk homogen innerledare med radien a och en därmed koaxiell ytterledare med innerradie b och ytterradie c. Ledarnas magnetiska egenskaper beskrivs av relativa permeabiliteten μ_r. Området mellan ledarna är fyllt med en perfekt isolator, relativ permeabilitet $\mu_r = 1$, ledningsförmåga $\sigma = 0$, med relativ dielektricitetskonstant ϵ_r. I innerledaren går en ström I som leds tillbaka genom ytterledaren. Strömmen antas vara jämt fördelad över respektive ledare.



   (a) Beräkna $\overline{\mathrm{H}}$-fältet för $0 < R < \infty$. (1p)

   (b) Beräkna magnetiseringsströmmarna i ledarna och på ledarnas ytor. (3p)

3. Man är intresserad av att lägga så hög spänning som möjligt över en mycket lång koaxialkabel. Koaxialkabelns innerledare har en radie $a = 1\,\mathrm{mm}$ och dess ytterledare har en innerradie $c = 30\,\mathrm{mm}$. Området mellan ledarna är från början fyllt med luft med genomslagshållfastheten $3 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m}$. För att höja den maximala spänningen lägger man ett koaxiellt plexiglas skikt runt innerledaren så att området mellan radierna a och b är fyllt med plexiglas. Plexiglas har relativa dielektricitetskonstanten $\epsilon_r = 3$ och genomslagshållfastheten $20 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m}$.

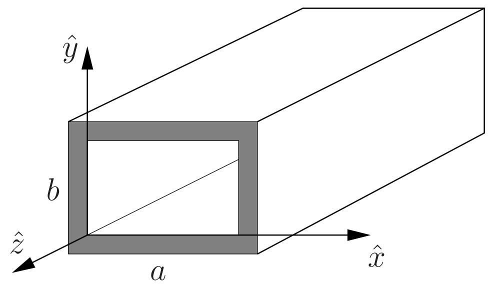
   (a) Beräkna hur stor radien b ska vara för att man ska kunna lägga så hög spänningen som möjligt mellan koaxialkabelns ledare. (3p)

   (b) Beräkna den maximala spänning. (1p)

4. Som bekant kan man visa att en möjlig fältbild i en rektangulär vågledare av en perfekt metall är en sk TE_{mn}-mod. TE står för *transversell elektrisk* och innebär att $\overline{\text{E}}$-fältet är vinkelrätt mot utbredningsriktningen. Indexen m och n är heltal större än eller lika med noll, dock ej båda noll. Väljer man specialfallet $m = 1$ och $n = 0$ får man i området $0 < x < a$, $0 < y < b$ fältet

$$\overline{\text{E}} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\omega t - k_z z\right) \hat{y}$$

om det är vakuum inuti vågledaren, det vill säga en våg som utbreder sig i $\hat{z}$-riktningen och vars $\overline{\text{E}}$-fält bara har $\hat{y}$-komposant.

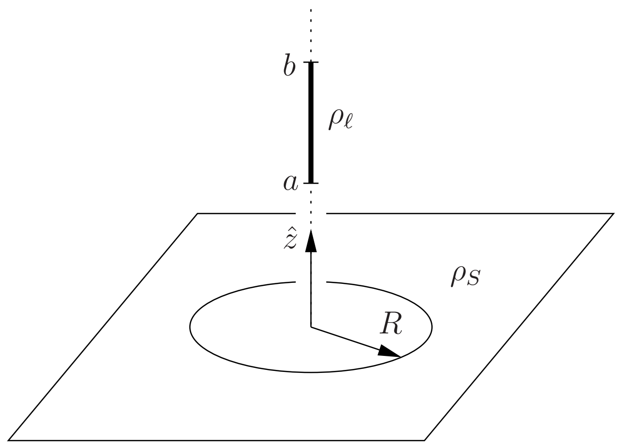


(a) Beräkna Pointing vektorn $\overline{\mathcal{P}}$ i området $0 < x < a$, $0 < y < b$ för godtyckligt z. Eventuella tidsoberoende bidrag till fält kan sättas till noll. (2p)

(b) Beräkna tidsmedelvärdet av $\overline{\mathcal{P}}$ över en period i området $0 < x < a$, $0 < y < b$ för godtyckligt z. (1p)

(c) Beräkna tidsmedelvärdet av effekten som transporteras genom vågledaren. (1p)

5. Figuren illustrerar ett vidsträckt jordat metallplan ovanför vilket en smal laddad stav placerats. Staven har en konstant linjeladdningstäthet ρ_ℓ (enhet C/m) och ligger längs z-axeln med början i $z = a$ och slut i $z = b > a$. Staven kommer att ge upphov till en ytladdningstäthet ρ_S i metallplanet.



(a) Beräkna $\rho_S(R)$ som funktion av avståndet till z-axeln, R. (2p)

(b) Räkningen i (a)-uppgiften har vanligen gjorts för en punktladdning Q. Frågan är nu om du klarar att byta fysikalisk bild så att du, *utgående från ditt svar på (a)-uppgiften*, genom en varsam gränsövergång får b att gå mot a på ett sådant sätt att stavens totala laddning är Q. På det sättet bör du alltså komma fram till det vanliga uttrycket för ρ_S då vi har en punktladdning Q på anståndet a ovanför ett vidsträckt metallplan. (2p)

FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

<u>Maxwells ekvationer:</u>

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \,, \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0 \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}$, $\quad \nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}}$, $\quad \overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}}$, $\quad$ Poyntingvektor: $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$

$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}} \right)$, $\quad \nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}}$, $\quad \overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 \, r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0 \, \overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \, m}{4\pi r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\quad \overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk kraft: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}} \right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\ \arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$\overline{\mathrm{A}} \cdot (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\overline{\mathrm{C}} \times \overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{C}} \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}})$

$\overline{\mathrm{A}} \times (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{C}}) - \overline{\mathrm{C}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f$

$\nabla \cdot (f\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \nabla f$

$\nabla \times (f\,\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \times \overline{\mathrm{A}} + \nabla f \times \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) - \overline{\mathrm{A}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$

$\nabla \times (\nabla V) = \overline{0}$

$\nabla \times (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = \nabla(\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}}) - \nabla^2 \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = 0$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

<u>Cartesiska koordinater</u> (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

<u>Cylindriska koordinater</u> (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

<u>Sfäriska koordinater</u> (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} \; &= \; \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ &\quad\; \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$