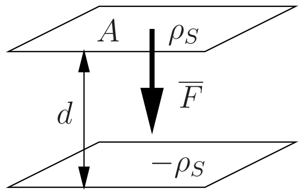
Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

(fylls i av ansvarig)

Datum för tentamen	2010-08-18
Sal	TER1
Tid	8 – 13
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	7
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013-28 1893
Besöker salen ca kl.	9:30 och 11:30
Kursadministratör (namn + tfnnr + mailadress)	Agne Virsilaite Maras 013-28 1229 agnvi@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av de tre sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt (exempel när resultat kan ses på webben, betygsgränser, visning, övriga salar tentan går i m.m.)	Betyg: 8–11 poäng 3, 12–15 poäng 4, 16–20 poäng 5 Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: `http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13/`

1. Denna uppgift består av två helt separata deluppgifter.

   (a) En mycket stor platta av en isolator har belagts på undersidan med en konstant ytladdningstäthet ρ_S. Rakt under den finns en lika stor platta av en isolator som har belagts på ovansidan med en konstant ytladdningstäthet $-\rho_S$. Vardera platta har arean A och avståndet mellan de belagda ytorna är d. Beräkna ett uttryck för beloppet av den kraft med vilken den övre plattan påverkas av den undre. Antag att plattsymmetri råder. (2p)



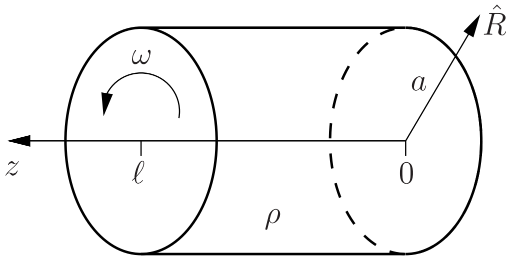
   (b) Massa är som bekant en form av energi. Viloenergin för en elektron med massan m_e kan skrivas $E = m_e c^2$ enligt Einsteins välkända formel där c är ljushastigheten i vakuum. Vi gör nu tankeexperimentet att elektronens viloenergi är av elektrostatisk och magnetostatisk natur. Vi antar att elektronen har sin laddning fördelad som en ytladdningstäthet på ett sfäriskt skal med radie a och att skalet roterar med vinkelhastigheten ω. a blir då en mätare på elektronens storlek. Vi antar vidare att den elektrostatiska energin är lika stor som den magnetostatiska energin. Beräkna både ett analytiskt och ett numeriskt värde på elektronradien a genom att kräva att den elektrostatiska energin är $m_e c^2/2$. (2p)

2. En cylinderkondensator består av två koaxiella metallcylindrar, den inre med radie a och den yttre med radie b. Cylindrarnas längd ℓ är mycket större än b. Mellanrummet mellan cylindrarna är fyllt med ett material som ur elektrostatisk synpunkt är linjärt med relativ dielektricitetskonstant ε_r. Ur 'ohmsk' synpunkt är materialet dock inhomogent dvs ledningsförmågan varierar enligt $\sigma(R) = (\rho_0 + kR^2)^{-1}$ där R mäter avståndet från cylindrarnas symmetriaxel. (ρ_0 och k är konstanter.)

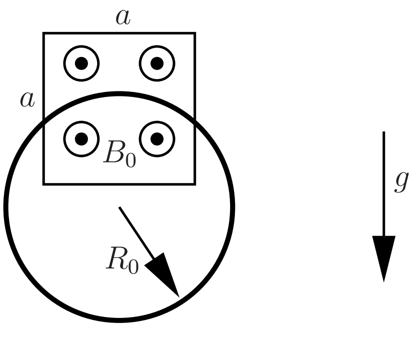
   (a) Sök ett uttryck för hur resistansen mellan metallcylindrarna R_Ω beror av de givna storheterna. (2p)

   (b) Eftersom materialet är inhomogent kommer det att samlas fri laddning i regionen $a < R < b$. Sök ett analytiskt uttryck för den totala fria laddning som finns i denna region då den totala ström som går från den inre till den yttre cylindern är I. (Vi förutsätter naturligtvis cylindersymmetri i hela området mellan cylindrarna.) (2p)

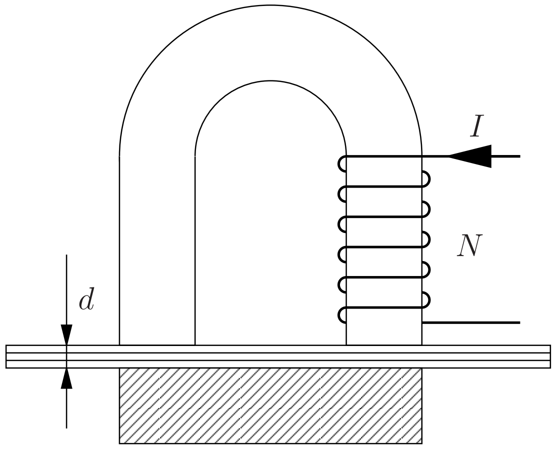
3. En cylinder med radie a och längd ℓ av ett isolerande omagnetiskt material har en homogen laddningstäthet ρ. Bestäm magnetiska flödestätheten $\overline{B}(z)$ längs cylinderns symmetriaxel då den roterar runt den med vinkelhastigheten ω. Ledning: Den roterande laddningstätheten kan ses som en radieberoende strömtäthet. (4p)



4. En cirkulär ring gjord av en tunn ledande tråd faller fritt, med sitt plan vertikalt, i ett horisontellt homogent magnetfält mellan polerna på en permanentmagnet. Ringens radie är $R_0 = 3{,}00\,\mathrm{cm}$ och den är gjord av en aluminiumtråd med radien $r_0 = 1{,}00\,\mathrm{mm}$. Ringen faller symmetriskt i gapet mellan polerna som är kvadratiska med sidlängden $a = 2{,}00\,\mathrm{cm}$. Magnetfältet antas vara homogent mellan polerna och noll annars. Ringens massa är $m = 1{,}60\,\mathrm{g}$ och dess resistans är $R_\Omega = 1{,}59\,m\Omega$. Man finner att ringen har en konstant hastighet $v_0 = 0{,}25\,\mathrm{m/s}$ när den är på väg ut ur fältet. Beräkna beloppet av den magnetiska flödestätheten B_0 mellan polerna. Både ett analytiskt och ett numeriskt svar krävs för full poäng. (4p)



5. Ett ok av mjukjärn attraheras till en permanentmagnet med kraften $F_0 = 50{,}0\,\mathrm{N}$. För att kunna bibehålla samma kraft även när men placerar en trave med papper mellan oket och permanentmagneten lindar man en spole med $N = 100$ varv på permanentmagneten. Permanentmagnetens effektiva längd är $\ell_m = 20{,}0\,\mathrm{cm}$ och dess effektiva tvärsnittsarea är $S_m = 4{,}00\,\mathrm{cm}^2$. Motsvarande uppgifter för oket är $\ell_o = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ och $S_o = 4{,}00\,\mathrm{cm}^2$. Varken permanentmagnetens eller okets magnetiska egenskaper är kända. Pappret antar vi är helt omagnetiskt. Beräkna strömmen $I(d)$ som krävs i spolen som funktion av tjockleken d på papperstraven för att kraften ska förbli oförändrad. Vi antar att d hela tiden är liten. (4p)



FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \,, \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0 \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}$, $\quad \nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}}$, $\quad \overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}}$, $\quad$ Poyntingvektor: $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$

$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}} \right)$, $\quad \nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}}$, $\quad \overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p \,\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 \, r^3} \left(2 \,\cos\theta \,\hat{r} + \sin\theta \,\hat{\theta} \right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0 \,\overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \, m}{4\pi r^3} \left(2 \,\cos\theta \,\hat{r} + \sin\theta \,\hat{\theta} \right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\quad \overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk kraft: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}} \right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\,\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$\overline{\mathrm{A}}\cdot(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\cdot(\overline{\mathrm{C}}\times\overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{C}}\cdot(\overline{\mathrm{A}}\times\overline{\mathrm{B}})$

$\overline{\mathrm{A}}\times(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{C}}) - \overline{\mathrm{C}}\,(\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}})$

$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f$

$\nabla\cdot(f\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}}\cdot\nabla f$

$\nabla\times(f\,\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla\times\overline{\mathrm{A}} + \nabla f\times\overline{\mathrm{A}}$

$\nabla\cdot(\overline{\mathrm{A}}\times\overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}}\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{A}}) - \overline{\mathrm{A}}\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{B}})$

$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V$

$\nabla\times(\nabla V) = \overline{0}$

$\nabla\times(\nabla\times\overline{\mathrm{A}}) = \nabla(\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}}) - \nabla^2\overline{\mathrm{A}}$

$\nabla\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{A}}) = 0$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

<u>Cartesiska koordinater</u> (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cylindriska koordinater (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfäriska koordinater (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} &= \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ &\quad \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$