Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

(fylls i av ansvarig)

Datum för tentamen	2010-05-31
Sal	T1, T2, U1, U3, U4, U6
Tid	8 – 13
Kurskod	TFYA13
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning	Elektromagnetism
Institution	IFM
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)	6
Jour/Kursansvarig	Peter Münger
Telefon under skrivtid	013-28 1893
Besöker salen ca kl.	9:30 och 11:30
Kursadministratör **(namn + tfnnr + mailadress)**	Marie Martinelle Wirdeland 013-28 1229 marwi@ifm.liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman Räknedosa (tömd på program och annan information) Formelblad (utgörs av de tre sista bladen på tentan) Matematiska tabeller, tex Beta, behövs dock ej
Övrigt **(exempel när resultat kan ses på webben, betygsgränser, visning, övriga salar tentan går i m.m.)**	Betyg: 8–11 poäng 3, 12–15 poäng 4, 16–20 poäng 5 Lösningar anslås på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset och på kurshemsidan: `http://www.ifm.liu.se/courses/TFYA13/`

1. Betrakta en plan elektromagnetisk våg i vakuum (luft) där $\overline{E}$-fältet ges av $\overline{E} = E_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{y}$.

    (a) Härled utifrån Maxwells ekvationer det tillhörande $\overline{B}$-fältet. För att skriva sambandet mellan fälten på en så enkel form som möjligt skall du använda sambandet $c = \omega/k$ (utan bevis) där c är ljushastigheten i vakuum. (Eventuella tidsoberoende bidrag till $\overline{B}$-fältet kan sättas till noll utan bevis.) (2p)

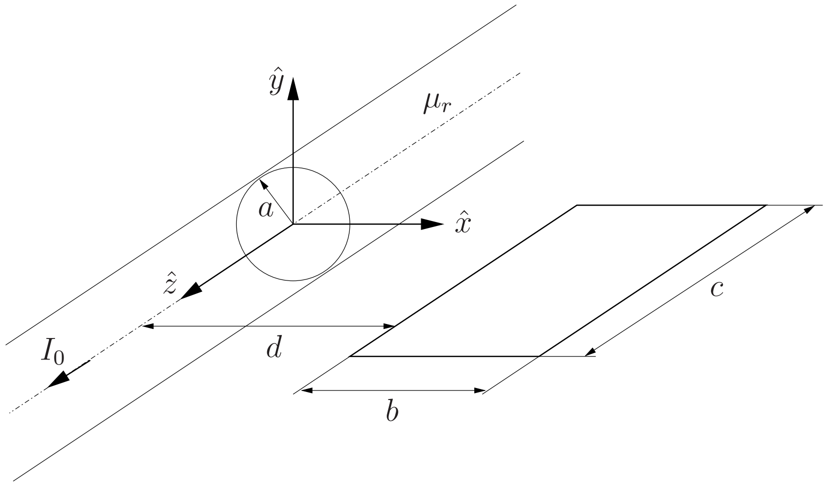
    (b) Antag nu att vågen har åstadkommits av en monokromatisk lampa som sänder ut ljus isotropt i alla riktningar. (På stort avstånd från källan kan ju även en sfärisk våg betraktas som plan när man vill beskriva den lokalt kring en viss punkt.) Antag att fälten vi studerat i (a)-uppgiften är de som gäller lokalt på avståndet $r = 10\,\mathrm{m}$ från källan. Antag att lampan strålar ut en ljus effekt av $P_0 = 25\,\mathrm{W}$, vilket alltså är tidsmedelvärdet under en period. Beräkna under dessa förutsättningar ett numeriskt värde på E_0. (2p)

2. En cylinderkondensator består av två koaxiella metallcylindrar, den inre med radie a och den yttre med radie b. Cylindrarnas längd ℓ är mycket större än b. Mellanrummet mellan cylindrarna är fyllt med ett material som ur elektrostatisk synpunkt är linjärt med relativ dielektricitetskonstant ε_r. Ledningsförmågan varierar dock enligt $\sigma = (\sigma_0 + kR)^{-1}$ där R mäter avståndet från cylindrarnas symmetriaxel. σ_0 och k är konstanter.

    (a) Sök ett uttryck för hur resistansen mellan metallytorna beror av de givna storheterna. (2p)

    (b) Eftersom materialet är inhomogent kommer det att samlas fri laddning i regionen $a < R < b$. Sök ett analytiskt uttryck för den totala fria laddning som finns i denna region. Den totala ström som går från den inre till den yttre metallytan är I. (Vi förutsätter cylindersymmetri i hela mellanrummet mellan metallytorna för att kunna räkna analytiskt.) (2p)

3. En oändlig rak ledare med cylindriskt tvärsnitt (radie a) för en tidsoberoende ström I_0 i $\hat{z}$-riktningen, se figur nedan. Ledarens material är magnetiskt och beskrivs av en konstant relativ permeabilitet μ_r. I xz-planet ligger en rektangulär slinga så som figuren visar ($d > a$).



   (a) Beräkna ett uttryck för det magnetiska flöde som går genom slingan. För att svaret ska bli entydigt skall du definiera flödet som positivt i $\hat{y}$-riktningen. (2p)

   (b) Beräkna den magnetiseringsströmtäthet $\overline{J}_m$ som uppstår i regionen $0 \leq R < a$. Strömmen I_0 antas vara jämnt fördelad över ledarens tvärsnitt. (1p)

   (c) Beräkna ytmagnetiseringsströmtätheten $\overline{J}_{sm}$ i ledarens ytskikt. (1p)

4. Ett magnetiskt dipolmoment $\overline{m} = m\hat{z}$ rör sig med konstant hastighet $\overline{v} = v\hat{z}$ längs $\hat{z}$-axeln från $z = -\infty$ mot $z = +\infty$. I planet $z = 0$ finns det en cirkulär slinga med centrum i origo och radien a. Beräkna den maximala inducerade elektromotoriska kraft ε_{emk} som induceras i den cirkulära slingan på grund av den magnetiska dipolen. (4p)

5. En såpbubbla med radien $r_0 = 2{,}00\,\text{cm}$ har getts en maximal laddning utan att genomslag sker i den omgivande luften. Den omgivande luftens genomslagshållfasthet är $\overline{E}_{max} = 20\,\text{kV/cm}$. Beräkna det elektrostatiska trycket på bubblan. Det ska tydligt framgå om trycket vill öka eller minska såpbubblans radie. (4p)

Lycka till!

FORMELBLAD TILL Y-LINJENS KURS I ELEKTROMAGNETISM.

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \,, \qquad \nabla \cdot \overline{\mathrm{B}} = 0 \,, \qquad \nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{J}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}$, $\nabla \cdot \overline{\mathrm{P}} = -\rho_{\mathrm{p}}$, $\overline{\mathrm{P}} \cdot \hat{n} = \rho_{\mathrm{sp}}$, Poyntingvektor: $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}$

$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0 \left(\overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{M}} \right)$, $\nabla \times \overline{\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{m}}$, $\overline{\mathrm{M}} \times \hat{n} = \overline{\mathrm{J}}_{\mathrm{sm}}$

Potential och $\overline{\mathrm{E}}$-fält från elektriskt dipolmoment.

$$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 \, r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Vektorpotential och $\overline{\mathrm{B}}$-fält från magnetiskt dipolmoment.

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0 \, \overline{\mathrm{m}} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \,, \qquad \overline{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \, m}{4\pi r^3} \left(2 \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)$$

Kraftmoment: $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{F}}$, $\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{m}} \times \overline{\mathrm{B}}$

Elektromotorisk kraft: $\varepsilon = \oint_{\mathrm{C}} \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}} \right) \cdot \overline{\mathrm{dl}} + \int_{\mathrm{S}} \left(-\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \right) \cdot \overline{\mathrm{dS}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Några vanliga integraler:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \; ; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \ln(x+(x^2+a^2)^{1/2}) \quad ; \int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\ \arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\,(x^2+a^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Några användbara vektoridentiteter (V och f är skalära funktioner):

$\overline{\mathrm{A}} \cdot (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\overline{\mathrm{C}} \times \overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{C}} \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}})$

$\overline{\mathrm{A}} \times (\overline{\mathrm{B}} \times \overline{\mathrm{C}}) = \overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{C}}) - \overline{\mathrm{C}}\,(\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla(fV) = f\,\nabla V + V\,\nabla f$

$\nabla \cdot (f\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \nabla f$

$\nabla \times (f\,\overline{\mathrm{A}}) = f\,\nabla \times \overline{\mathrm{A}} + \nabla f \times \overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{B}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) - \overline{\mathrm{A}} \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{B}})$

$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$

$\nabla \times (\nabla V) = \overline{0}$

$\nabla \times (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = \nabla(\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}}) - \nabla^2\overline{\mathrm{A}}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) = 0$

Gradient, divergens, rotation och Laplace-operator i olika koordinatsystem (V är en skalär funktion).

<u>Cartesiska koordinater</u> (x,y,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cylindriska koordinater (R,ϕ,z):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\hat{R} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_R) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{R} + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{R}\,\left[\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfäriska koordinater (r,θ,ϕ):

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathrm{A}} \;&=\; \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\phi)\right]\hat{\theta} + \\ &\quad \frac{1}{r}\,\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$