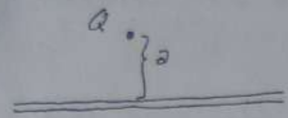
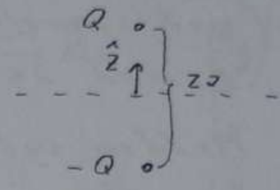
Elektromagnetism, TFYA13/NFYB03, 2009-08-14

1)

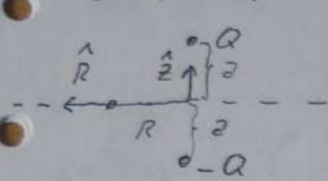


Använd spegelladdnings-metoden.



$$\underline{\bar{F}} = \frac{-Q\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 (2a)^2}\hat{z} = \underline{\frac{-Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{z}}$$

b) Fältet precis ovanför metallplanet blir detsamma som från Q och spegelladdningen −Q.



$$\bar{E}(R\hat{R}) = \frac{Q(-a\hat{z}+R\hat{R})}{4\pi\varepsilon_0(a^2+R^2)^{3/2}} + \frac{-Q(a\hat{z}+R\hat{R})}{4\pi\varepsilon_0(a^2+R^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{-Q\,a\,\hat{z}}{2\pi\varepsilon_0(a^2+R^2)^{3/2}}$$

Med metallplanet på platts kan vi lägga in en liten Gaussdosa och använda Gauss sats för att visa att $\varrho_s = \bar{D}\cdot\hat{n}$.

$$\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = \bar{D}\cdot\hat{z}\cdot\Delta S + 0 + 0 = Q_{fri,\,inner} = \varrho_{sö}\Delta S \Rightarrow$$

$$\underline{\varrho_{sö}} = \bar{D}\cdot\hat{z} = \varepsilon_0\bar{E}\cdot\hat{z} = \underline{\frac{-Q\,a}{2\pi(a^2+R^2)^{3/2}}}$$

Under metallplanet finns det ingen laddning. Spegelladdningsmetoden där ger ett laddningsfritt rum och därmed inte heller någon ytladdning.

$$\underline{\varrho_{su} = 0}$$

c) $$\underline{Q_{tot}} = Q_{vtot} + Q_{\sigma tot} = 0 + \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{-Q\,a\,R\,d\phi\,dR}{2\pi\,(a^2+R^2)^{3/2}} = -Qa\left[\frac{-1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right]_0^{\infty} = \underline{-Q}$$

Svar: a) $\bar{F} = \dfrac{-Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{z}$

b) $\varrho_{sö} = \dfrac{-Qa}{2\pi(a^2+R^2)^{3/2}}$; $\varrho_{su} = 0$

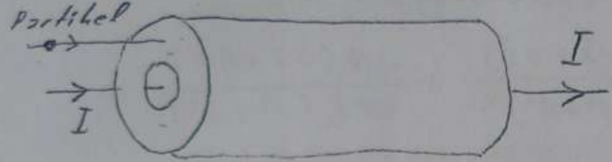
c) $Q_{tot} = -Q$

2, Väli att skjuta in partiklarna parallellt med symmetriaxeln, $\hat{z}$-axeln, och på ett avstånd, R, med $a < R < b$.

Mellan cylindrarna har vi ett $\bar{H}$-fält som fås mha cirkulationssatsen och symmetri.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Symmetri: } \bar{H} = H(R)\hat{\phi} \\ &\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = I_{fri.oms.} \end{aligned}\right\} \quad 2\pi R H(R) = I_{oms.fri} = I \Rightarrow$$

$$\bar{H} = \frac{I}{2\pi R}\hat{\phi} \Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi}$$



För att bestämma $\bar{E}$-fältet använder vi Gauss-sats, symmetri och ansätter längd L och laddning Q på inre.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Symmetri } \bar{D} = D(R)\hat{R} \\ &\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q_{fri.innes.} \end{aligned}\right\} \quad 2\pi R L\, D(R) + 0 + 0 = Q \Rightarrow$$

$$\bar{D} = \frac{Q}{2\pi R L}\hat{R} \Rightarrow \bar{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R L}\hat{R} \Rightarrow$$

$$V = \int_{Ref}^{Akt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_b^a \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 R L}\hat{R}\cdot\hat{R}\,dR = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln b/a \Rightarrow \bar{E} = \frac{V}{R\ln b/a}\hat{R}$$

Kraften på partikeln blir då $\bar{F} = q\bar{v}\times\bar{B} + q\bar{E} =$

$$= qv\hat{z}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi} + q\frac{V}{R\ln b/a}\hat{R} = \frac{q}{R}\left[-\frac{\mu_0 I}{2\pi}v + \frac{V}{\ln b/a}\right]\hat{R} \Rightarrow$$

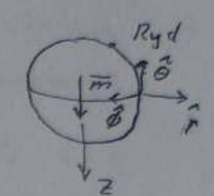
Partiklar med hastighet så att $\bar{F} = \bar{0}$ passerar igenom.

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi}v = \frac{V}{\ln b/a} \Rightarrow v = \frac{2\pi V}{\mu_0 I \ln b/a}$$

Svar: Partiklar med hastighet $\frac{2\pi V}{\mu_0 I \ln b/a}$ passerar igenom om de skjuts in parallellt med symmetriaxeln mellan cylindrarna.

$$\mathcal{E}_{emk} = \int (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}) = \left\{\theta = \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\,\hat{\theta}$$

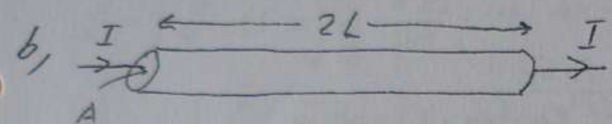


$$\bar{v} = -v\hat{r}\,,\quad d\bar{l} = r\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$\mathcal{E}_{emk} = \int_0^{L/r} \left(-v\hat{r} \times \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\hat{\theta}\right) \cdot r\,d\phi\,\hat{\phi} = -v\frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \cdot \frac{L}{r} = -V \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{4\pi r^3}{\mu_0 m v} V \approx 4770\text{ m} \approx \underline{\underline{4.8\text{ km}}}$$

b)



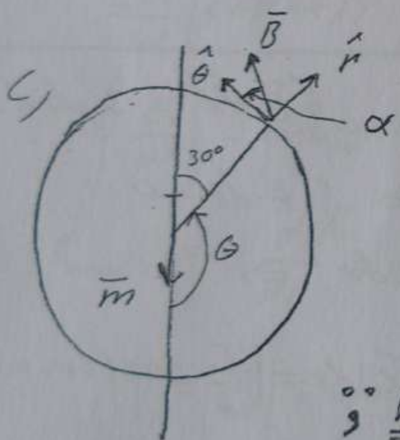
ansätt $\bar{E} = \frac{U}{2L}\hat{z} \Rightarrow$

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} = \frac{\sigma U}{2L}\hat{z} \Rightarrow I = \frac{\sigma U A}{2L} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{R_\Omega}} = \frac{U}{I} = \frac{2L}{\sigma A} \approx \underline{\underline{4.8 \cdot 10^2\,\Omega}}$$

Ej realistiskt att försumma!

c)



$$\theta = 180° - 30° = 150°$$

$$\bar{B} = B_r\,\hat{r} + B_\theta\,\hat{\theta}$$

$$\alpha = \arctan\frac{B_r}{B_\theta} = \arctan\left(\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\right) = -73{,}9°$$

$$\therefore\ \underline{\underline{|\alpha| = 73{,}9 \quad (\text{alt } 180° - 73{,}9° = 106.1°)}}$$

Svar: a) $L = 4.8$ km

b) Resistansen är 480 Ω dvs ej realistiskt att försumma den.

c) Vinkeln är 73.9° (eller 106,1°)

4) Ansätt en ström I från inre sfären till yttre.
symmetri $\Rightarrow \bar{J} = J(r)\hat{r}$, $I = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{S}$ på sfärisk
yta S med radie r, $a<r<b \Rightarrow I = 4\pi r^2 J(r) \Rightarrow$

$$\bar{J} = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{r} \Rightarrow \bar{E} = \bar{J}/\sigma = \frac{I}{4\pi k r}\hat{r} \Rightarrow$$

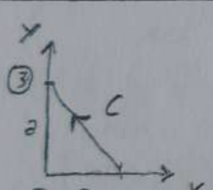
$$U = \int_{Ref}^{Akt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_b^a -\frac{I}{4\pi k r}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \frac{I}{4\pi k}\ln b/a \Rightarrow \bar{E} = \frac{U}{r\ln b/a}\hat{r}$$

$$\therefore\ \bar{D} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r U}{r\ln b/a}\hat{r} \text{ och } \rho = \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\rho}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r U r^2}{r\ln b/a}\right) = \underline{\underline{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r U}{r^2\ln b/a}}}$$

Svar: $\underline{\underline{\rho(r) = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r U}{r^2\ln b/a}}}$

---

5) 

Dela upp linjeintegralen $\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l}$ i 3 delar.

①→②: $d\bar{l} = \hat{x}dx \Rightarrow \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0 \Rightarrow \int_1^2 \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$

②→③: $y = a - x \Rightarrow d\bar{l} = (\hat{x}-\hat{y})dx \Rightarrow$

$$\int_{②}^{③} \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_a^0 E_0\sin(kx-\omega t)\,\hat{y}\cdot(\hat{x}-\hat{y})dx = \left[\frac{E_0}{k}\cos(kx-\omega t)\right]_a^0 =$$

$$= \frac{E_0}{k}\left[\cos(\omega t) - \cos(ka-\omega t)\right]$$

③→①: $d\bar{l} = \hat{y}dy \Rightarrow \int_{③}^{①} \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_a^0 E_0\sin(k\cdot 0-\omega t)\,\hat{y}\cdot\hat{y}\,dy =$

$$= aE_0\sin(\omega t)$$

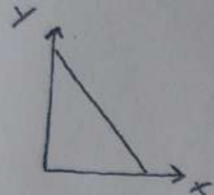
$$\therefore\ \underline{\underline{\mathcal{E}_{emk} = E_0\left[\frac{1}{k}\cos(\omega t) - \frac{1}{k}\cos(ka-\omega t) + a\sin(\omega t)\right]}}$$

b) Använd MW:s ekvation: $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z} = kE_0\cos(kx-\omega t)\hat{z} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\bar{B} = \frac{kE_0}{\omega}\sin(kx-\omega t)\hat{z} + \bar{B}_0$$

tidsober. konst. ger ett tidsober. flöde och därmed inget bidrag till $\mathcal{E}_{emk} = -\frac{d\Phi}{dt}$. Sätt $\bar{B}_0 = \bar{0}$.



$$\Phi = \int \bar{B}\cdot d\bar{S} = \int_0^a\int_0^{a-y} \frac{kE_0}{\omega}\sin(kx-\omega t)\hat{z}\cdot\hat{z}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{kE_0}{\omega}\int_0^a\left[\frac{-\cos(kx-\omega t)}{k}\right]_0^{a-y} dy = \frac{E_0}{\omega}\int_0^a\left[\cos(\omega t) - \cos(ka-ky-\omega t)\right]dy =$$

$$= \frac{E_0}{\omega}\left[\cos(\omega t)y + \frac{\sin(ka-ky-\omega t)}{k}\right]_0^a =$$

$$= \frac{E_0}{\omega}\left[a\cos(\omega t) + \frac{1}{k}\sin(\omega t) - \frac{1}{k}\sin(ka-\omega t)\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_{emk} = -\frac{d\Phi}{dt} = -E_0\left[-a\sin(\omega t) - \frac{1}{k}\cos(\omega t) + \frac{1}{k}\cos(ka-\omega t)\right] =$$

$$= E_0\left[a\sin(\omega t) + \frac{1}{k}\cos(\omega t) - \frac{1}{k}\cos(ka-\omega t)\right] = \mathcal{E}_{emk}$$

Svar: Båda ger $\mathcal{E}_{emk} = E_0\left[a\sin(\omega t) + \frac{1}{k}\left\{\cos(\omega t) - \cos(ka-\omega t)\right\}\right]$