Magnus Degerfalk

Tekniska högskolan i Linköping
Institutionen för Fysik och Mätteknik
Peter Münger
Ankn. 1893, 5797

Tentamen i **TFYY53 (och TFFY39) Elektromagnetism Y**, fredag 11 augusti 2006 kl 8.00 – 13.00.

Kursens mål: Att ge de kunskaper i elektromagnetismens grunder som krävs för studier i fysik och tillämpade elektrotekniska ämnen, samt att ge färdigheter i att lösa problem av grundläggande slag.

Tillatna hjälpmedel: Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman
Räknedosa (tömd på program och annan information)
Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan)
Tefyma-tabell; Ingelstam, Rönngren, Sjöberg
Matematiska tabeller, tex Beta, är tillåtna men behövs ej

OBS Allvarligt fel i 1996 års upplaga av Physics Handbook på sidan 170:

Ska stå: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,dv$ **Står:** $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r^2}\,dv$

Frågor besvaras av Peter Münger som kommer minst två gånger under skrivningstiden. Lösningar sätts upp på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset efter skrivningens slut. Skrivningsresultat anslås utanför kursexpeditionen i fysikhuset senast 10 arbetsdagar efter tentamenstillfället. Skrivningen omfattar 5 problem som vardera kan ge 4 poäng; maximalt kan man alltså få 20 poäng och betygsskalan är:

Nya kursen TFYY53

Betyg	3	8 – 11	poäng
"	4	12 – 15	"
"	5	16 – 20	"

Gamla kursen TFFY39

Betyg	3	9 – 12	poäng
"	4	13 – 16	"
"	5	17 – 20	"

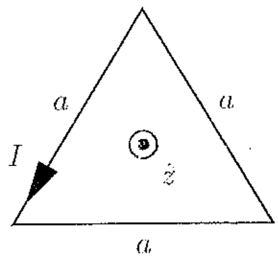
Lösningar skall om möjligt åtföljas av figur. Införda beteckningar skall definieras, ekvationer motiveras och numeriskt svar alltid skrivas ut med enhet. Orimligt svar medför noll poäng på uppgiften. Problemen är inte nödvändigtvis ordnade i svårighetsgrad.

Lycka till!

1. Betrakta en strömförande slinga i form av en plan liksidig triangel med sidolängd a. Tråden i slingan är tunn och för strömmen I. Inför en z-axel genom slingans tyngdpunkt och riktad längs med ytnormalen till slingan. Positiv riktning för z-axeln ges av positiv omloppsriktning för strömmen i slingan.

   (a) Beräkna den magnetiska vektorpotentialen, $\overline{A}(z)$ i en godtycklig punkt på z-axeln. (2p)

   (b) Beräkna den magnetiska flödestätheten $\overline{B}(z)$ i en godtycklig punkt på z-axeln. (2p)



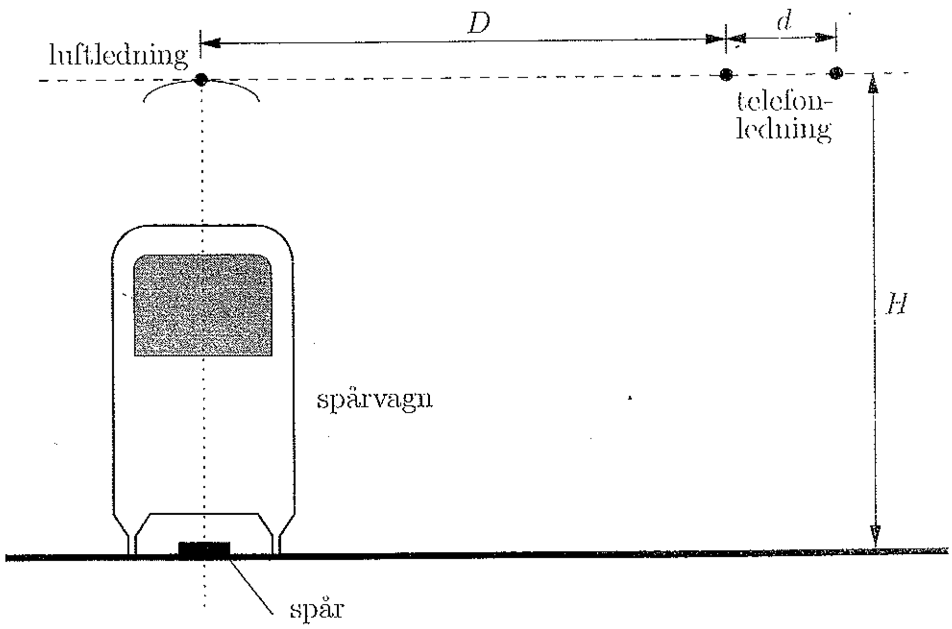
2. Området mellan två koncentriska tunna sfäriska metallskal med radie a respektive $b > a$ är fyllt med ett dielektrikum som har en konstant ledningsförmaga σ. Dielektrikumet har dock en relativ dielektricitetskonstant som varierar med radien, r, enligt $\varepsilon_r(r) = kr$ där k är en konstant med dimension 1/längd. Beräkna volymladdningstätheten, ρ_{fri}, av fria laddningar i dielektrikumet om inre sfärens potential är U relativt den yttre. (4p)

3. Vi vill tillverka en koaxialkabel sådan att elektriska fältstyrkan är till beloppet konstant inuti isolationslagret.

   (a) Hur ska den relativa dielektricitetskonstanten variera som funktion av radien för att vi ska uppnå detta? Innerradien på den yttre ledaren är b och ytterradien på den inre ledaren är a. Den relativa dielektricitetskonstanten är $\varepsilon_r(a) = \varepsilon_a$ precis utanför den inre ledaren. (2p)

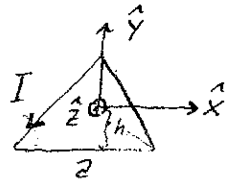
   (b) Beräkna kapacitansen per längdenhet för kabeln. (2p)

4. Ett spårvagnsspår löper parallellt med en telefonledning, se figur. Amplituden på den harmoniska strömmen i luftledningen till spårvagnen är I_0 och vinkelfrekvensen är ω. Spåret fungerar som återledare för strömmen. Vi betraktar alla ledare som mycket tunna i förhållande till avståndet mellan dem. Spåret, återledaren, kan approximeras som en tunn ledare på marken mitt under spårvagnen. Bestäm amplituden på den inducerade elektromotoriska kraften i en sektion av telefonledningen som är ℓ lång. (4p)



5. En lång homogen cylindrisk ledare med radien a beskrivs av relativa permeabiliteten μ_r, ledningsförmågan σ och relativa dielektricitetskonstanten ε_r. Cylindern för en harmoniskt tidsvarierande ström $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ i cylinderaxelns riktningen. Strömtätheten har bara en komponent och den är parallell med cylinderaxeln. Låt z-axeln sammanfalla med cylinderaxeln och gör den komplexa ansatsen för strömtätheten. $J_z = \Re e\{J_c(R) \cdot \exp(j\omega t)\}$, för att studera skinn-effekten. Visa hur man kan komma fram till en differentialekvation för den komplexa strömtätheten J_c dvs härled ett samband mellan J_c och dess derivator $\frac{\partial J_c}{\partial R}$ och $\frac{\partial^2 J_c}{\partial R^2}$ med avseende på radien R i cyliderkoordinater. Det är tillåtet att anta att $\omega\, \varepsilon_0/\sigma \ll 1$ för att göra en lämplig approximation. (4p)

ntamen i Elektromagnetism Y, TFYY53, 06-08-11



Inför avståndet h, för enkelhets skull

$$\frac{h}{a/2} = \tan 30° = 1/\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

a) Dela upp slingan i 3 delar. Räkna först på delen parallellt med $\hat{x}$-axeln.

$$\bar{A}(\bar{r}) = \int_C \frac{\mu_0 I d\bar{l}'}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|} = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0 I \hat{x}\, dx}{4\pi\sqrt{x^2+h^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+h^2+z^2}\right)\right]_{-a/2}^{a/2}\hat{x} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{a/2+\sqrt{a^2/4+h^2+z^2}}{-a/2+\sqrt{a^2/4+h^2+z^2}}\,\hat{x}$$

De andra två delarna ger bidrag med samma belopp men riktade längs med respektive del. Vektorsumman, dvs. hela $\bar{A}$, blir därför $\bar{0}$, vilket även inses direkt ur symmetrin.

b) $$\bar{B}(\bar{r}) = \int_C \frac{\mu_0 I d\bar{l}' \times (\bar{r}-\bar{r}')}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|} = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0 I \hat{x} \times [z\hat{z}-(x\hat{x}-h\hat{y})]}{4\pi[x^2+h^2+z^2]^{3/2}}\,dx =$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0 I(-z\hat{y}+h\hat{z})}{4\pi[x^2+h^2+z^2]^{3/2}}\,dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(-z\hat{y}+h\hat{z})\left[\frac{x}{(h^2+z^2)\sqrt{x^2+h^2+z^2}}\right]_{-a/2}^{a/2} =$$

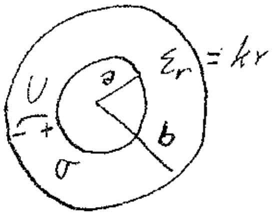
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot a\cdot\frac{(-z\hat{y}+h\hat{z})}{h^2+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2/4+h^2+z^2}}$$

Som ovan för $\bar{A}$ tas $\hat{y}$-bidraget ut av bidrag från de andra två delarna medan $\hat{z}$-bidraget trefaldigas när alla tre delarna adderas.

$$\bar{B}(z\hat{z}) = \frac{3\mu_0 I}{4\pi}\frac{ah}{(h^2+z^2)\sqrt{a^2/4+h^2+z^2}}\,\hat{z}$$

Svar: $\bar{A}(z\hat{z}) = \bar{0}$

$$\bar{B}(z\hat{z}) = \frac{3\mu_0 I}{4\pi}\frac{ah}{(h^2+z^2)\sqrt{a^2/4+h^2+z^2}}\,\hat{z} \quad \text{där } h = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$



Ansätt en ström I från inre sfären ut till yttre.

Symmetri $\Rightarrow \bar{J} = J(r)\hat{r}$

$$I = \int \bar{J}\cdot d\bar{S} = 4\pi r^2 J(r) \Rightarrow \bar{J} = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}$$

sfäriskt yta mellan sfärerna

$$\bar{E} = \bar{J}/\sigma = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\hat{r} \; ; \; \bar{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\bar{E} = \frac{\varepsilon_0 k r I}{4\pi\sigma r^2}\hat{r} = \frac{\varepsilon_0 k I}{4\pi\sigma r}\hat{r}$$

$$\rho_f = \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\varepsilon_0 k I}{4\pi\sigma r}\right) = \frac{\varepsilon_0 k I}{4\pi\sigma r^2}$$

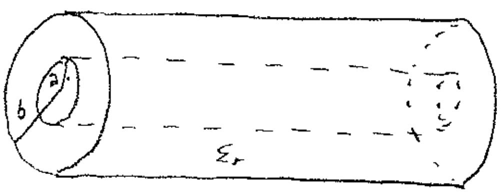
Vad är I?

$$U = \int_{Ref}^{A\ell t} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_b^a -\frac{I}{4\pi\sigma r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \Rightarrow$$

$$I = \frac{4\pi\sigma ab}{b-a}U \Rightarrow \rho_f = \frac{\varepsilon_0 k ab}{(b-a)r^2}U$$

Svar: $\rho_f = \frac{\varepsilon_0 k ab}{(b-a)r^2}U$ i området mellan sfärerna.

3



Ansätt laddningen ρ_ℓ per längdsenhet på inre cylindern.

Symmetri $\Rightarrow \bar{D} = D(R)\hat{R}$

Gauss sats $\oint \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q_{fri,innes}$

$$\Rightarrow \underbrace{2\pi R L D(R)}_{mantel} + \underbrace{0 + 0}_{lock\ o\ botten} = L\rho_\ell \Rightarrow \bar{D} = \frac{\rho_\ell}{2\pi R}\hat{R} \Rightarrow$$

$$\bar{E} = \bar{D}/\varepsilon_0\varepsilon_r = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}\hat{R}$$ Kravet är att detta ska vara oberoende av R $\Rightarrow \varepsilon_r\cdot R = konst.$

Vi har även att $\varepsilon_r(R=a) = \varepsilon_a$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = \frac{a}{R}\varepsilon_a$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 \frac{a}{R}\varepsilon_a R}\hat{R} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_a a}\hat{R}$$

$$U = \int_{Ref}^{Akt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_b^a -\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_a a}\hat{R}\cdot\hat{R}\,dR = \frac{\rho_\ell(b-a)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_a a}$$

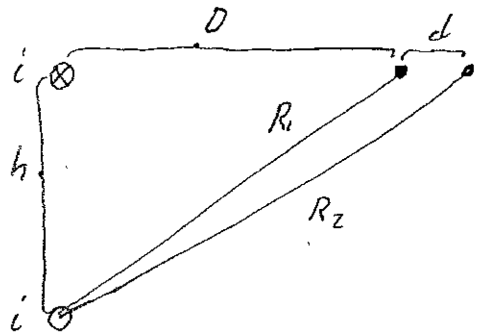
Räkna på längden $L \Rightarrow Q = \rho_\ell \cdot L \Rightarrow$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\rho_\ell L}{U} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{C}{L}}} = \frac{\rho_\ell}{U} = \underline{\underline{\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_a a}{b-a}}}$$

Svar: a) $\varepsilon_r = \varepsilon_a a/R$ b) $C/L = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_a a/(b-a)$

---

4) Rita en schematisk figur



$\bar{H}$-fältet pga strömmen i luftledningen fås mha symmetri och cirkulationssatsen.

$$\left.\begin{array}{l}\oint \bar{H}\cdot d\bar{l} = I_{fri,omsl} \\ \bar{H} = H(R)\hat{\phi}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}2\pi R\, H(R) = i \Rightarrow \\ \bar{H} = \frac{i}{2\pi R}\hat{\phi}\end{array}$$

Magnetiska flödet ner mellan telefontrådarna på längden l blir

$$\Phi_1 = \int_D^{D+d}\int_0^l \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\,dz\,dR = \frac{\mu_0 i}{2\pi} l \ln\frac{D+d}{D}$$

P.s.s. för återledaren, spåret (OBS olika $\hat{\phi}$ o R)

$$\Phi_2 = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^l \frac{-\mu_0 i}{2\pi R}\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\,dz\,dR = \frac{-\mu_0 i}{2\pi} l \ln\frac{R_2}{R_1}$$

Totalt flöde: $\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} l \ln\left(\frac{D+d}{D}\cdot\frac{R_1}{R_2}\right)$; $i = I_0 \cos\omega t$

$$\varepsilon_{emk} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 \omega I_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{D+d}{D}\cdot\frac{\sqrt{D^2+h^2}}{\sqrt{(D+d)^2+h^2}}\right)\sin\omega t$$

Svar: Amplituden blir $\varepsilon_{emk} = \frac{\mu_0 \omega I_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{D+d}{D}\cdot\frac{\sqrt{D^2+h^2}}{\sqrt{(D+d)^2+h^2}}\right)$

Använd Maxwells två rotationssamband.

$$\left.\begin{aligned}\bar\nabla\times\bar H &= \bar J + \frac{\partial \bar D}{\partial t}\\ \bar B &= \mu_0\mu_r \bar H\\ \bar D &= \varepsilon_0\varepsilon_r \bar E\\ \bar J &= \sigma \bar E\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \bar\nabla\times\bar B = \mu_0\mu_r\left(\bar J + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\sigma}\frac{\partial \bar J}{\partial t}\right)$$

Men $\frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma} \ll 1$ ger att den andra termen i högerledet kan försummas.

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ \bar\nabla\times\bar B = \mu_0\mu_r \bar J \ &\Rightarrow\ \bar\nabla\times\frac{\partial \bar B}{\partial t} = \mu_0\mu_r\frac{\partial \bar J}{\partial t}\\ \left.\begin{aligned}\bar\nabla\times\bar E &= -\frac{\partial \bar B}{\partial t}\\ \bar J &= \sigma\bar E\end{aligned}\right\} &\Rightarrow\ \bar\nabla\times\bar J = -\sigma\frac{\partial \bar B}{\partial t}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\bar\nabla\times(\bar\nabla\times\bar J) = -\mu_0\mu_r\sigma\frac{\partial \bar J}{\partial t}$$

Den komplexa ansattsen $\bar J = \mathrm{Re}\{J_c(R)e^{j\omega t}\}\hat z$ ger den komplexa ekvationen:

$$\bar\nabla\times(\bar\nabla\times J_c(R)\hat z) = -j\omega\mu_0\mu_r\sigma J_c(R)\hat z$$

$$\bar\nabla\times J_c(R)\hat z = -\frac{\partial J_c}{\partial R}\hat\phi$$

$$\bar\nabla\times\left(-\frac{\partial J_c}{\partial R}\hat\phi\right) = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial J_c}{\partial R}\right)\hat z = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial J_c}{\partial R} + R\frac{\partial^2 J_c}{\partial R^2}\right)\hat z$$

$$\therefore\ -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial J_c}{\partial R} + R\frac{\partial^2 J_c}{\partial R^2}\right)\hat z = -j\omega\mu_0\mu_r\sigma J_c\hat z \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 J_c}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial J_c}{\partial R} = j\omega\mu_0\mu_r\sigma J_c$$

<u>Svar:</u> $\underline{\underline{\frac{\partial^2 J_c}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial J_c}{\partial R} = j\omega\mu_0\mu_r\sigma J_c}}$