MD

Tekniska högskolan i Linköping
Institutionen för Fysik och Mätteknik
Peter Münger
Ankn. 1893

Tentamen i **TFYY53 (och TFFY39) Elektromagnetism Y**, onsdag 12 januari 2005 kl 8.00 – 13.00.

Kursens mål: Att ge de kunskaper i elektromagnetismens grunder som krävs för studier i fysik och tillämpade elektrotekniska ämnen, samt att ge färdigheter i att lösa problem av grundläggande slag.

Tillåtna hjälpmedel:
- Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman
- Räknedosa (tömd på program och annan information)
- Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan)
- Tefyma-tabell; Ingelstam, Rönngren, Sjöberg
- Matematiska tabeller, tex Beta, är tillåtna men behövs ej

OBS Allvarligt fel i 1996 års upplaga av Physics Handbook på sidan 170:

Ska stå: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,dv$ Står: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r^2}\,dv$

Frågor besvaras av Peter Münger som dyker upp minst två gånger under skrivningstiden. Lösningar sätts upp på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset efter skrivningens slut. Skrivningsresultat anslås utanför kursexpeditionen i fysikhuset senast 10 arbetsdagar efter tentamenstillfället. Skrivningen omfattar 5 problem som vardera kan ge 4 poäng; maximalt kan man alltså få 20 poäng och betygsskalan är:

Nya kursen TFYY53

Betyg	3	8–11	poäng
”	4	12–15	”
”	5	16–20	”

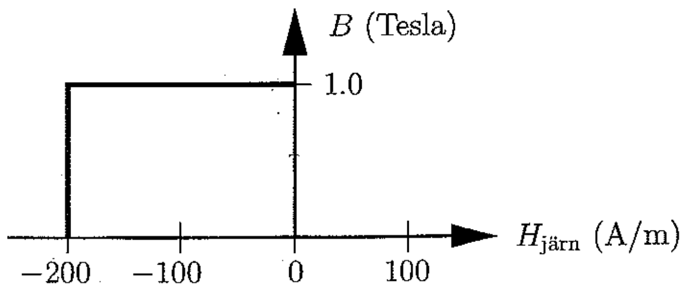
Gamla kursen TFFY39

Betyg	3	9–12	poäng
”	4	13–16	”
”	5	17–20	”

Lösningar skall om möjligt åtföljas av figur. Införda beteckningar skall definieras, ekvationer motiveras och numeriskt svar alltid skrivas ut med enhet. Orimligt svar medför noll poäng på uppgiften. Problemen är inte nödvändigtvis ordnade i svårighetsgrad.

Lycka till!

1. En magnetisk krets har åstadkommits på följande sätt. Järnämnet, som ursprungligen var format som en lång rak cylinder med längd 10 cm, har böjts så att vi fått en praktiskt taget sluten magnetisk krets. Mellan ändytorna bildas ett litet luftgap med längd 0,1 mm. För att förstärka magneten har man runt järnämnet lindat 1000 varv av en ledningstråd, som för en tidsoberoende ström på 20 mA. Järnämnets magnetiska egenskaper beskrivs av diagrammet nedan.



(a) Beräkna den magnetiska flödestätheten i luftgapet. (2p)

(b) Beräkna ytmagnetiseringsströmtätheten i järnämnets ytskikt. (2p)

2. (a) En total laddning Q har fördelats längs *omkretsen* av en kvadrat med sidolängd $2a$ så att man fått en konstant *linjeladdningstäthet*. Beräkna potentialen i kvadratens centrum. Potentialens referenspunkt ligger på oändligt avstånd. (Uppgiften kan lösas på minst två olika sätt - det ena sättet är betydligt enklare. Kanske är det bäst att börja med deluppgift (b)). (3p)

(b) Laddningen Q har fördelats längs *omkretsen på en cirkel* med radie a. Beräkna potentialen i cirkelns centrum. Referenspunkt som i deluppgift (a). (1p)

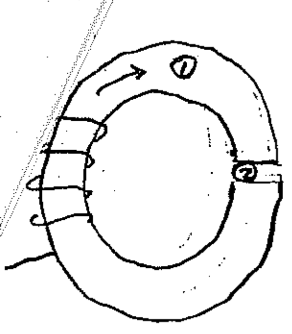
3. En urankärna har laddningen $92\,e$, radien $7{,}4\cdot 10^{-15}$ m, och massan $3{,}9\cdot 10^{-25}$ kg. Bestäm den elektrostatiska energin i 1 kg uran genom att först beräkna energin för en ensam kärna som antas ha konstant laddningstäthet. (Det är en liten del av denna energi som frigörs när uranet genomgår fission och kärnorna klyvs.) (4p)

4. Nedanstående uttryck ger potentialen i varje punkt av rummet uttryckt i sfäriska koordinater. För $r > a$ gäller $V = \frac{\alpha \cos\theta}{\varepsilon_0 r^2}$ och för $r < a$ gäller $V = \frac{\alpha r \cos\theta}{\varepsilon_0 a^3}$, där α är en konstant.

(a) Antag att potentialen åstadkommits genom att fria laddningar placerats ut i vakuum. Hur ser i så fall laddningsfördelningen ut? Förutom att beskriva laddningens rumsliga utbredning skall du ange storleken på eventuella linje- eller yt- eller rymd-laddningstätheter eller punktladdningar. (3p)

(b) Antag att potentialen i stället orsakats av en elektret i form av ett sfäriskt klot med radie a. Vilken är i så fall polarisationen $\overline{P}$? (1p)

5. En plattkondensator bestående av två cirkulära uppladdade plattor med radie a och separationen $d \ll a$ befinner sig långt från andra laddningar i ett område där det yttre elektromagnetiska fältet är noll. Plattornas centra kopplas ihop med en rak tunn motståndstråd (av längden d), varvid plattorna långsamt laddas ur genom tråden. Bestäm storleken av det magnetiska fältet B mellan plattorna i en punkt på avståndet R ($0 < R < a$) från symmetriaxeln då strömmen i motståndstråden är I. Antag att resistansen i motståndtråden är så stor att strömmen i den kan betraktas som tidsoberoende. Ledning: Använd symmetri och en av Maxwells ekvationer. (4p)



Cirkulationssatsen: $\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = I_{oms,fri} \Rightarrow$

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI \quad ①$$

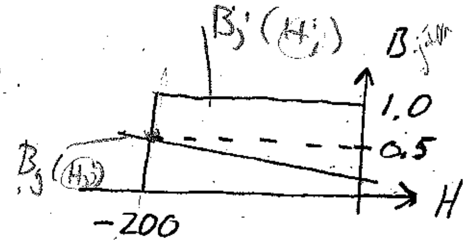
Ansätt tvärsnittsarea S i järn och luftgap samt försumma läckning.

$$B_1 S = B_2 S \Rightarrow B_1 = B_2 = B \quad ②$$

I luft $\quad B_2 = \mu_0 H_2 \quad ③$

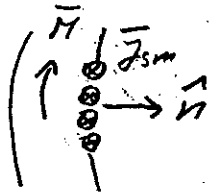
$$① \,\&\, ② \,\&\, ③ \Rightarrow \quad B = (NI - H_1 l_1)\mu_0 / l_2 \quad ④$$

Rita in ④ i det givna diagrammet.



Grafisk lösning ger $B = 0.5\,T$, $H_j = -200$ A/m

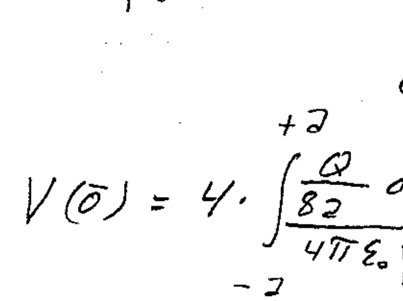
b) $\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}) \Rightarrow \bar{M} = \bar{B}/\mu_0 - \bar{H}_j \approx 4\cdot 10^5$ A/m



$$\bar{J}_{sm} = \bar{M}\times\hat{n} \Rightarrow J_{sm} = 4\cdot 10^5 \text{ A/m}$$

Svar: a) $B = 0.5\,T$ b) $J_{sm} = 4\cdot 10^5$ A/m

/ a)



$$V(\bar{r}) = \int \frac{dQ'}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|} \quad (*)$$

"Ref ∞"

Symmetrin ger att det räcker med att räkna på en sida och multiplicera med 4.

$$V(\bar{0}) = 4\cdot \int_{-a}^{+a} \frac{\frac{Q}{8a}\,dx'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+(x')^2}} = \frac{Q}{8\pi a\varepsilon_0}\int_{-a}^{+a}\frac{dx'}{\sqrt{a^2+(x')^2}} = \frac{Q}{8\pi a\varepsilon_0}\Big[\ln(x'+\sqrt{a^2+(x')^2})\Big]_{-a}^{+a}$$

$$= \frac{Q}{8\pi a\varepsilon_0}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| = \frac{Q}{4\pi a\varepsilon_0}\ln(\sqrt{2}+1)$$

b, $V(\bar{r}) = \int\limits_{\circledast} \frac{dQ'}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|}$ "Ref ∞"

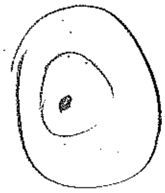
I centrum av cirkeln är $|\bar{r}-\bar{r}'| = a$ för alla dQ'

$$\Rightarrow V(\bar{0}) = \int\limits_{\circledast} \frac{dQ'}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \int\limits_{\circledast} dQ' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$ 3 b

Svar: a, $V(\bar{0}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \ln(\sqrt{2}+1)$ b, $V(\bar{0}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

Betrakta en kärna som ett homogent klot med radie a och laddningstäthet ϱ.

Gauss sats + symmetri $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \oint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q_{fri,innes} \\ \bar{D} = D(r)\hat{r} \end{array}\right\} \Rightarrow$



$$\bar{D} = \frac{Q_{fri.innes}}{4\pi r^2} = \begin{cases} \dfrac{\frac{4\pi r^3}{3}\varrho}{4\pi r^2} = \dfrac{\varrho r}{3} & : 0 \le r \le a \\ \dfrac{\frac{4\pi a^3}{3}\varrho}{4\pi r^2} = \dfrac{\varrho a^3}{3r^2} & : a \le r \end{cases}$$

$Q = \varrho \frac{4\pi r^3}{3}$

$\varrho = \frac{3Q}{4\pi r^3}$

$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^3}\hat{r}$

$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}$

$$W_e = \int\limits_{\substack{\text{"Hela"} \\ R^3}} \frac{1}{2}\bar{E}\cdot\bar{D}\, d\tau = \int\limits_{\substack{\text{"Hela"} \\ R^3}} \frac{1}{2\varepsilon_0} \bar{D}\cdot\bar{D}\, d\tau = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\varrho r}{3}\right)^2 r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_a^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\varrho a^3}{3r^2}\right)^2 r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{\varrho^2}{9}\cdot\frac{a^5}{5} + \frac{\varrho^2 a^6}{9}\cdot\frac{1}{a}\right\} 4\pi =$$

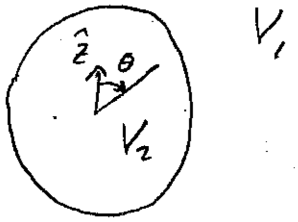
$$= \frac{4\pi\varrho^2 a^5}{15\varepsilon_0} = \left\{\varrho = \frac{92e}{\frac{4\pi a^3}{3}} = \frac{69e}{\pi a^3}\right\} = \frac{6348 e^2}{\pi 5 \varepsilon_0 a} \approx 1{,}58\cdot 10^{-10}\, J$$

$$W_{e,tot} = W_e \cdot \frac{M}{m} = W_e \cdot \frac{1}{3.9\cdot 10^{-25}} \approx 4.1\cdot 10^{14}\, J$$

Svar: Energin är 0,41 PJ per kg.

Index 1 för $r > a$

Index 2 för $0 < r < a$



a) Potentialen saknar singulära punkter ⇒ Inga punkt eller linjeladdningar. (Potentialen går ju som $1/r^2$ vid punktladdningar och $\ln r$ vid linje.)

Undersök om det finns rymdladdning ρ.

$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}$, $\bar{E} = -\nabla V$, $\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho \Rightarrow \rho = -\varepsilon_0 \bar{\nabla}^2 V$

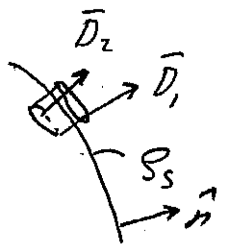
Men $\bar{\nabla}^2 V_1 = 0$ och $\bar{\nabla}^2 V_2 = 0 \Rightarrow \rho = 0 \quad \forall \bar{r}$

Återstår att kontrollera ytladdnings-tähet.

Men det kan bara finnas där $\bar{D}$ är diskontinuerligt.

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} = -\varepsilon_0 \bar{\nabla} V \Rightarrow \bar{D}_1 = \frac{2\alpha\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\alpha\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}$$

$$\bar{D}_2 = \frac{-\alpha\cos\theta}{a^3}\hat{r} + \frac{\alpha\sin\theta}{a^3}\hat{\theta}$$



Vi har diskontinuitet vid $r = a$.

Gauss sats på pillerburk $\Rightarrow (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \cdot \hat{r} = \rho_s \Rightarrow$

$$\rho_s = \left(\frac{2\alpha\cos\theta}{a^3} + \frac{\alpha\cos\theta}{a^3}\right) = \frac{3\alpha\cos\theta}{a^3}$$

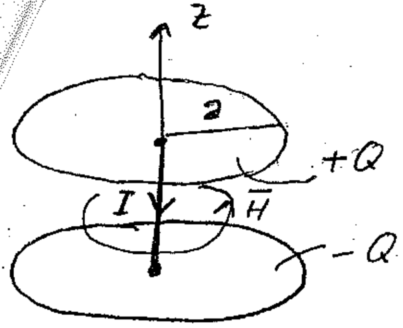
b) Prova med $\bar{P} = P_0 \hat{z} \Rightarrow$

$$\rho_{sp} = \bar{P} \cdot \hat{n} = \bar{P} \cdot \hat{r} = P_0 \hat{z} \cdot \hat{r} = P_0 \cos\theta$$

Om vi identifierar detta ρ_{sp} med ρ_s får vi att med $P_0 = \frac{3\alpha}{a^3}$ ger $\bar{P} = P_0 \hat{z}$ den givna potentialen.

Svar: a) Finns bara $\rho_s = \frac{3\alpha\cos\theta}{a^3}$ vid $r = a$.

b) $\bar{P} = \frac{3\alpha}{a^3}\hat{z}$ ger den givna potentialen.



Ansätt laddning $+Q$ på undersidan av övre skivan och $-Q$ på undre plattans ovansida.

Varje plattas area är $A = \pi a^2$.

Som vanligt i plattkondensator blir

$\bar{D} = \frac{Q}{A}(-\hat{z})$ mellan plattorna.

$\Rightarrow$ Förskjutningsströmmen mellan plattorna: $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t}(-\hat{z}) = \left\{ I = -\frac{dQ}{dt} \right\} = \frac{I}{A}\hat{z}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Maxwell: } \bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \text{Symmetri: } \bar{H} = H(R)\hat{\phi} \end{array}\right\} \Rightarrow \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \iint_S \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \cdot d\bar{S}$$

$$\text{ger } 2\pi R\, H(R) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{strömmen} \\ \text{i tråden}}}{-I} + \underbrace{\int \frac{I}{A}\hat{z}\cdot\hat{z}\, dS}_{\substack{\text{Förskjutnings-} \\ \text{ström genom } C}} = -I + \frac{I}{A}\cdot \pi R^2$$

$$\Rightarrow 2\pi R\, H(R) = I\left(\frac{R^2}{a^2} - 1\right) \Rightarrow \bar{B} = \mu_0 \bar{H} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)\hat{\phi}$$

Svar: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)$

Notera att $\bar{B} = \bar{0}$ då $R > a$.

Förskjutningsströmmar är viktiga!