OLOF

Tekniska högskolan i Linköping
Institutionen för Fysik och Mätteknik
Peter Münger
Ankn. 1893

Tentamen i **TFYY53 (och TFFY39) Elektromagnetism Y**, torsdag 19 augusti 2004 kl 8.00 – 13.00.

Kursens mål: Att ge de kunskaper i elektromagnetismens grunder som krävs för studier i fysik och tillämpade elektrotekniska ämnen, samt att ge färdigheter i att lösa problem av grundläggande slag.

Tillåtna hjälpmedel:	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman
	Räknedosa (tömd på program och annan information)
	Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan)
	Tefyma-tabell; Ingelstam, Rönngren, Sjöberg
	Matematiska tabeller, tex Beta, är tillåtna men behövs ej

OBS Allvarligt fel i 1996 års upplaga av Physics Handbook på sidan 170:

Ska stå: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,dv$ **Står:** $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r^2}\,dv$

Frågor besvaras av Peter Münger som dyker upp minst två gånger under skrivningstiden. Lösningar sätts upp på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset efter skrivningens slut. Skrivningsresultat anslås utanför kursexpeditionen i fysikhuset senast 10 arbetsdagar efter tentamenstillfället. Skrivningen omfattar 5 problem som vardera kan ge 4 poäng; maximalt kan man alltså få 20 poäng och betygsskalan är:

Nya kursen TFYY53

Betyg	3	8 – 11	poäng
"	4	12 – 15	"
"	5	16 – 20	"

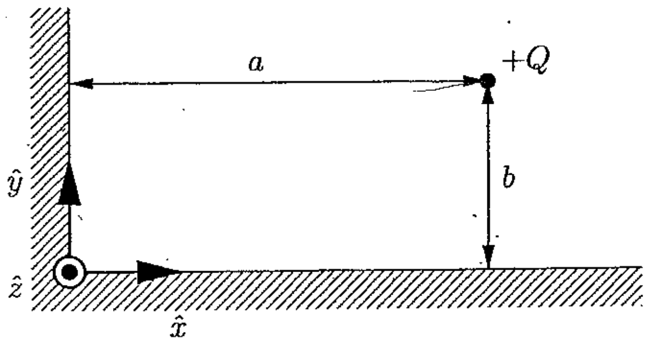
Gamla kursen TFFY39

Betyg	3	9 – 12	poäng
"	4	13 – 16	"
"	5	17 – 20	"

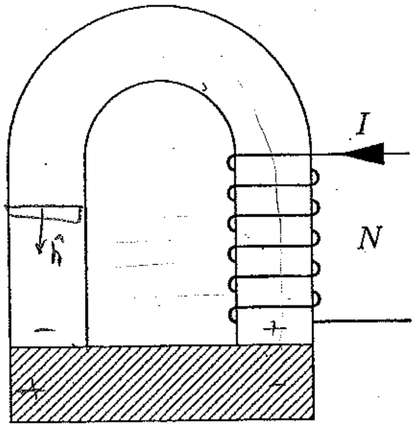
Lösningar skall om möjligt åtföljas av figur. Införda beteckningar skall definieras, ekvationer motiveras och numeriskt svar alltid skrivas ut med enhet. Orimligt svar medför noll poäng på uppgiften. Problemen är inte nödvändigtvis ordnade i svårighetsgrad.

Lycka till!

1. Beräkna kraften, både till belopp och riktning, på en positiv punktladdning $+Q$ på avståndet a respektive b från två stora jordade halvplan av metall. (Tips. Spegelladdningsmetoden.) (4p)



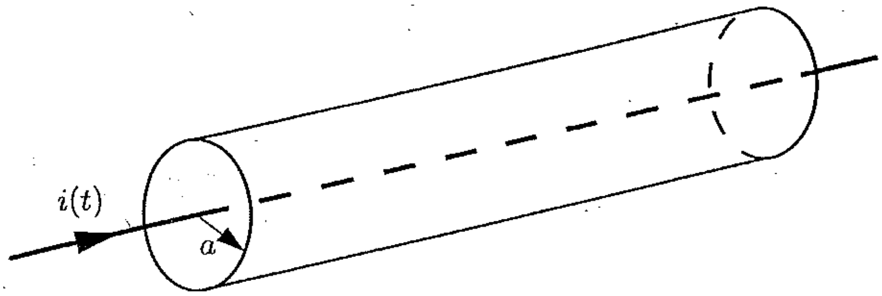
2. En elektromagnet består av en hästskoformad järnstång med en lindning som har $N = 150$ varv. Magnetens effektiva längd är $l_m = 30\,\text{cm}$, dess effektiva tvärsnitts-area är $S_m = 2{,}0\,\text{cm}^2$ och de magnetiska egenskaperna beskrivs väl av en relativ permeabilitet $\mu_{r\,m} = 200$. Beräkna hur stor strömmen I i lindningen måste vara för att man ska kunna lyfta ett ok av järn om det har längden $l_o = 10\,\text{cm}$, och tvärsnittsarean $S_o = 2{,}0\,\text{cm}^2$. Densiteten för järnet i oket är $\rho_o = 7{,}6\,\text{kg/dm}^3$ och dess magnetiska egenskaperna beskrivs väl av en relativ permeabilitet $\mu_{r\,o} = 150$. Vi antar att okets effektiva magnetiska längd är l_o och att dess effektiva magnetiska tvärsnittsarea är S_o. (4p)



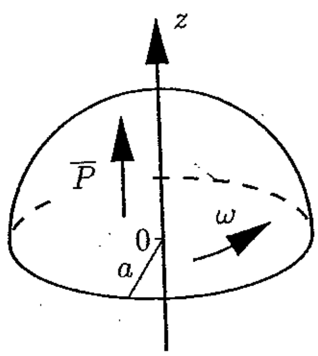
3. En kondensators belägg utgörs av två koaxiella metallcylindrar med längden L. Den inre har ytterradie a och den yttre har innerradie $b \ll L$. Mellanrummet är helt fyllt med en elektret vars polarisation ges av $\overline{P} = \varepsilon_0 \chi \overline{E} + P_0 \hat{R}$ i cylinderkoordinater där χ och P_0 är konstanter. Elektretens ledningsförmåga är $\sigma = 0$, det vill säga den är en perfekt isolator. Beräkna kondensatorns differentiella kapacitans. Ledning: differentiell kapacitans definieras som $C_{\text{diff}} \equiv \frac{dQ}{dU}$ vilket kan jämföras med den vanliga definitionen av kapacitans $C \equiv \frac{Q}{U}$. (4p)

3

4. En lång homogen cylindrisk ledare med radien a beskrivs av relativa permeabiliteten μ_r, ledningsförmågan σ och relativa dielektricitetskonstanten ε_r. Cylindern för en harmoniskt tidsvarierande ström $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ i cylinderaxelns riktningen. Låt z-axeln sammanfalla med cylinderaxeln och gör den komplexa ansatsen för strömtätheten, $J_z = \Re e\{J_c(R) \cdot e^{j\omega t}\}$, för att studera skinn-effekten. Härled en differentialekvation för den komplexa strömtätheten J_c dvs härled ett samband mellan J_c och dess partiella derivator $\frac{\partial J_c}{\partial R}$ och $\frac{\partial^2 J_c}{\partial R^2}$ med avsende på radien R. Det är tillåtet att anta att $\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r / \sigma \ll 1$ för att göra en lämplig approximation. (4p)



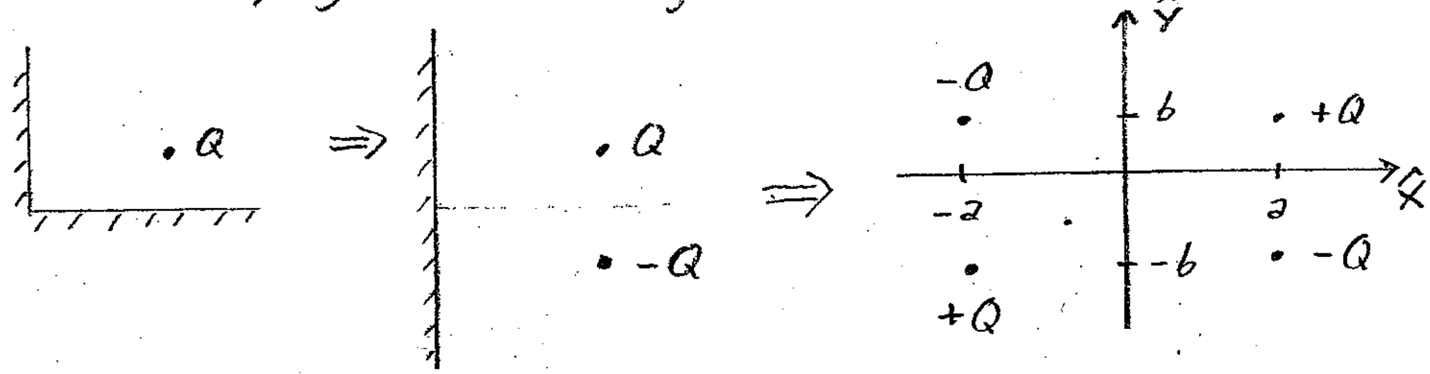
5. En elektret, det vill säga ett material med en polarisation $\overline{P}$ även utan något yttre elektriskt fält, har formen av en halvsfär med radien a. Elektreten har en konstant polarisation $\overline{P} = P\hat{z}$ riktad längs med symmetriaxeln, z-axeln, som den roterar runt i positiv riktning med vinkelfrekvensen ω. z-axelns nollställe har valts så att det sammanfaller med centrum av halvsfärens plana yta. Elektreten är omagnetisk och utanför den har vi vakuum.



(a) Beräkna magnetiska vektorpotentialen $\overline{A}$ i origo. (1p)

(b) Beräkna magnetiska flödestätheten $\overline{B}$ i origo. (3p) lämen i Elektromagnetism Y, TFYY53 2004-08-19

Använd spegelladdningsmetoden i 2 steg.



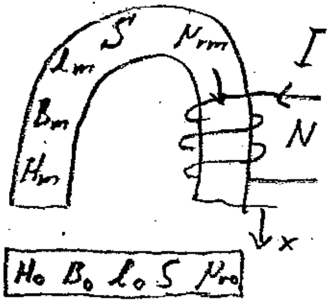
Generellt: $\bar{F}_{12} = \dfrac{Q_1 Q_2 (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \Rightarrow$

$$\bar{F} = \frac{+Q(-Q)\,2a\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0 (2a)^3} + \frac{+Q(+Q)(2a\hat{x} + 2b\hat{y})}{4\pi\varepsilon_0 [(2a)^2 + (2b)^2]^{3/2}} + \frac{+Q(-Q)\,2b\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0 (2b)^3} =$$

$$= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-\hat{x}}{a^2} + \frac{a\hat{x} + b\hat{y}}{[a^2+b^2]^{3/2}} + \frac{-\hat{y}}{b^2}\right\} \qquad \frac{2}{4\cdot 8\cdot 2}$$

Svar: $\bar{F} = \dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{a\hat{x} + b\hat{y}}{[a^2+b^2]^{3/2}} - \dfrac{\hat{x}}{a^2} - \dfrac{\hat{y}}{b^2}\right\}$

2,



Lägg in ett luftgap med längd x.

Ansätt magn. flöde Φ i kretsen:

$\Phi = \int \bar{B}\cdot d\bar{S} \Rightarrow B_m = B_\ell = B_0 = B = \Phi/S$

$\bar{B} = \mu_0\mu_r \bar{H} \Rightarrow H_m = \dfrac{\Phi}{\mu_0\mu_{rm} S} \quad H_0 = \dfrac{\Phi}{\mu_0\mu_{r0} S} \quad H_\ell = \dfrac{\Phi}{\mu_0 S}$

$W_m = \int \frac{1}{2}\bar{B}\cdot\bar{H}\,d\tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Phi^2}{\mu_0 S^2} S\left\{\dfrac{l_m}{\mu_{rm}} + \dfrac{l_0}{\mu_{r0}} + 2x + 0\right\}$

"Hela R^3"

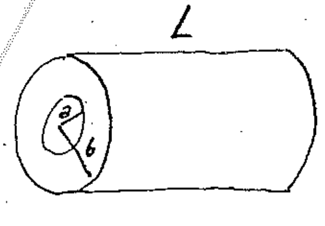
$$\left.\begin{aligned} \bar{F}_m &= -\bar{\nabla} W_m = -\frac{\partial W_m}{\partial x}\hat{x} = -\frac{\Phi^2}{\mu_0 S}\hat{x} \\ \bar{F}_g &= \rho S l_0 g \hat{x} \end{aligned}\right\} \bar{F}_m + \bar{F}_g = \bar{0} \Rightarrow \frac{-\Phi^2}{\mu_0 S} + \rho S l_0 g = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi = S\sqrt{\mu_0 \rho l_0 g}$$

Cirkulationssatsen när $x=0$, $\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = I_{fri,omsl} \Rightarrow H_m l_m + H_0 l_0 = NI \Rightarrow$

$$I = \frac{1}{N}\left\{\frac{\Phi l_m}{\mu_0\mu_{rm} S} + \frac{\Phi l_0}{\mu_0 \mu_{r0} S}\right\} = \frac{1}{N}\left\{\frac{l_m}{\mu_{rm}} + \frac{l_0}{\mu_{r0}}\right\}\sqrt{\rho l_0 g/\mu_0} \approx 1{,}11\,A$$

Svar: Strömmen måste vara minst 1,2 A



Ansätt laddning Q på inre cyl.
Cylinder sym. $\Rightarrow \bar{D} = D(R)\hat{R}$
Gauss sats: $\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q_{fri,innes}$
"Gauss cylinder, $a < R < b$" $\Rightarrow$

$$\underbrace{2\pi R L\, D(R)}_{\text{mantel}} + \underset{\uparrow\ \text{lock}}{0} + \underset{\uparrow\ \text{botten}}{0} = Q \Rightarrow \bar{D} = \frac{Q}{2\pi R L}\hat{R}$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \varepsilon_0(1+\chi)\bar{E} + P_0\hat{R} \Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{\varepsilon_0(1+\chi)}\left\{\frac{Q}{2\pi R L} - P_0\right\}\hat{R}$$

$$U = \int_{Ref}^{Abt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_b^a \frac{-1}{\varepsilon_0(1+\chi)}\left\{\frac{Q}{2\pi R L} - P_0\right\}\hat{R}\cdot\hat{R}\,dR =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0(1+\chi)}\left\{\frac{Q}{2\pi L}\ln b/a - P_0(b-a)\right\} \Rightarrow Q = \frac{2\pi L}{\ln b/a}\left\{\varepsilon_0(1+\chi)U + P_0(b-a)\right\}$$

$$\Rightarrow C_{diff} \equiv \frac{dQ}{dU} = \frac{2\pi L}{\ln b/a}\varepsilon_0(1+\chi)$$

Svar: Differentiella kapacitansen är $C_{diff} = \dfrac{2\pi L\varepsilon_0(1+\chi)}{\ln b/a}$

4, $\bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J} + \dfrac{\partial\bar{D}}{\partial t}$ Men $\dfrac{\partial\bar{D}}{\partial t} = \varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{\partial\bar{E}}{\partial t} = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\sigma}\dfrac{\partial\bar{J}}{\partial t}$

Med den givna komplexa ansatsen ger det att:

$$\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\sigma}\frac{\partial}{\partial t}\left[Re\left\{J_c(R)e^{i\omega t}\right\}\right] = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}{\sigma}Re\left\{jJ_c(R)e^{i\omega t}\right\}$$

Men $\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}{\sigma} \ll 1. \Rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{H} \approx \bar{J}$; $\bar{B} = \mu_0\mu_r\bar{H} \Rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\mu_r\bar{J}$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}\times\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = \mu_0\mu_r\frac{\partial\bar{J}}{\partial t}\ ;\quad \bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\ ;\quad \bar{J} = \sigma\bar{E} \Rightarrow$$

$$\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{J}) = -\mu_0\mu_r\sigma\frac{\partial\bar{J}}{\partial t}$$

Men $\bar{\nabla}\times\bar{J} = -\dfrac{\partial J_z}{\partial R}\hat{\phi} \Rightarrow \bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{J}) = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial R}\left(-R\dfrac{\partial J_z}{\partial R}\right)\hat{z} =$

$$= \frac{-1}{R}\left\{R\frac{\partial^2 J_z}{\partial R^2} + \frac{\partial J_z}{\partial R}\right\}\hat{z} = -\mu_0\mu_r\sigma\frac{\partial J_z}{\partial t}\hat{z}$$

Vilket på komplex form ger svaret.

Svar: J_c måste uppfylla: $\dfrac{\partial^2 J_c}{\partial R^2} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial J_c}{\partial R} + j\omega\mu_0\mu_r\sigma J_c = 0$

Polarisationen kan tolkas som polarisationsladdn.

$$\rho_p \equiv -\bar\nabla\cdot\bar P = 0 \;,\; \rho_{sp} = \bar P\cdot\hat n \Rightarrow \begin{cases} \rho_{spu} = P\hat z\cdot(-\hat z) = -P & \text{under} \\ \rho_{sp\ddot o} = P\hat z\cdot\hat r = P\cos\theta & \text{på sfären} \end{cases}$$

När halvsfären roterar kan vi se det som en ytströmtäthet $\bar J_{sm} = n_s q\bar v = \rho_s\bar v$ med

$$\left.\begin{array}{ll} \bar v_u = R\omega\hat\phi & \text{på underytan} \\ \bar v_{\ddot o} = R\omega\hat\phi = a\sin\theta\,\omega\hat\phi & \text{på halvsfären} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\bar J_{su} = -PR\omega\hat\phi$ underytan

$\bar J_{s\ddot o} = aP\cos\theta\sin\theta\,\omega\hat\phi$ halvsfären.

a) $\bar A(\bar 0) = \int_S \frac{\mu_0\bar J_s(\bar r')}{4\pi|\bar r-\bar 0|}dS' = \bar 0$ ty integranden beror bara på ϕ implicit genom $\hat\phi$ och vi integrerar över $0\le\phi\le 2\pi$. ∴ $\bar A(\bar 0) = \bar 0$ pga symmetri!

b) $\bar B(\bar r) = \int_S \frac{\mu_0\bar J_s\times(\bar r-\bar r')}{4\pi|\bar r-\bar r'|^3}dS'$

$$\bar B_u(\bar r) = \int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0(-PR\omega\hat\phi)\times\overbrace{[\bar 0 - R\hat R]}^{-\hat z}}{4\pi R^3}R\,d\phi\,dR = \frac{-\mu_0 P\omega}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot a\hat z$$

$$\bar B_{\ddot o}(\bar r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\mu_0 aP\omega\cos\theta\sin\theta\,\underbrace{\hat\phi\times[\bar 0 - a\hat r]}_{+\hat\theta = +[\cos\theta\hat R - \sin\theta\hat z]}}{4\pi a^3}a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi =$$

$\hat R \Rightarrow 0$ ty $0\le\phi\le\pi$

$$= \frac{\mu_0 aP\omega}{4\pi}\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^3\theta\,d\theta\,\hat z = \frac{\mu_0 aP\omega}{2}\left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}\hat z = \frac{\mu_0 aP\omega}{8}\hat z$$

$$∴\; \bar B = \bar B_u + \bar B_{\ddot o} = \mu_0 aP\omega\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right\}\hat z = -\frac{3}{8}\mu_0 aP\omega\hat z$$

Svar: a) $\bar A(\bar 0) = \bar 0$ b) $\bar B(\bar 0) = -\frac{3}{8}\mu_0 aP\omega\hat z$