Tekniska högskolan i Linköping
Institutionen för Fysik och Mätteknik
Peter Münger
Ankn. 1893

Tentamen i **TFYY53 (och TFFY39) Elektromagnetism Y**, tisdag 1 juni 2004 kl 14.00 – 19.00.

Kursens mål: Att ge de kunskaper i elektromagnetismens grunder som krävs för studier i fysik och tillämpade elektrotekniska ämnen, samt att ge färdigheter i att lösa problem av grundläggande slag.

Tillåtna hjälpmedel:	Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman
	Räknedosa (tömd på program och annan information)
	Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan)
	Tefyma-tabell; Ingelstam, Rönngren, Sjöberg
	Matematiska tabeller, tex Beta, är tillåtna men behövs ej

OBS Allvarligt fel i 1996 års upplaga av Physics Handbook på sidan 170:

Ska stå: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,dv$ **Står:** $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r^2}\,dv$

Frågor besvaras av Peter Münger som dyker upp minst två gånger under skrivningstiden. Lösningar sätts upp på anslagstavlan i studerandeentrén till fysikhuset efter skrivningens slut. Skrivningsresultat anslås utanför kursexpeditionen i fysikhuset senast 10 arbetsdagar efter tentamenstillfället. Skrivningen omfattar 5 problem som vardera kan ge 4 poäng; maximalt kan man alltså få 20 poäng och betygsskalan är:

Nya kursen TFYY53

Betyg	3	8–11	poäng
"	4	12–15	"
"	5	16–20	"

Gamla kursen TFFY39

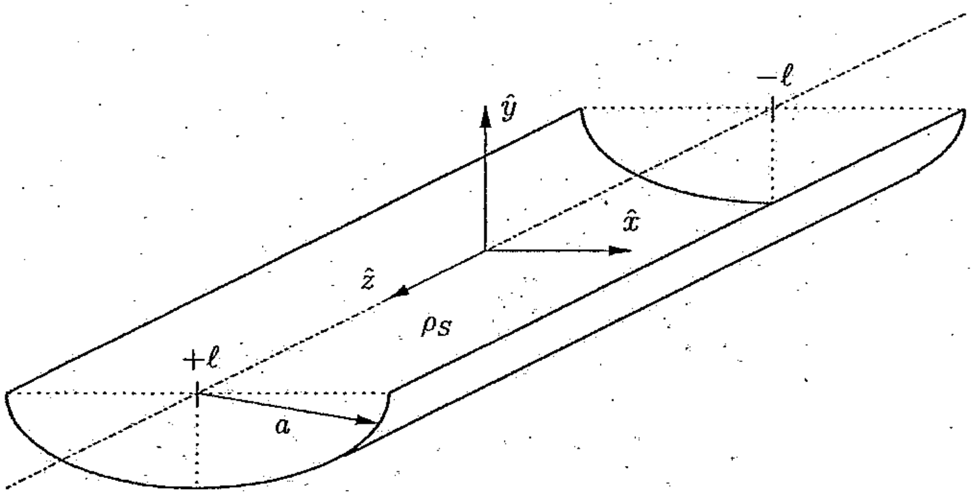
Betyg	3	9–12	poäng
"	4	13–16	"
"	5	17–20	"

Lösningar skall om möjligt åtföljas av figur. Införda beteckningar skall definieras, ekvationer motiveras och numeriskt svar alltid skrivas ut med enhet. Orimligt svar medför noll poäng på uppgiften. Problemen är inte nödvändigtvis ordnade i svårighetsgrad.

Lycka till!

1. En lång rak cylindrisk ledare för en konstant ström I som antas vara jämt fördelad över ledarens tvärsnittsyta. Ledarens radie är a. Det ledande materialets magnetiska egenskaper beskrivs av en konstant relativ permeabilitet μ_r. Lägg ett cylinderkoordinatsystem med z-axeln i strömmens riktning längs symmetriaxeln. Beräkna *magnetiseringsströmtätheten* i ledaren och *ytmagnetiseringsströmtätheten* på ledarens yta. För full poäng krävs såväl belopp som riktning på magnetiseringsströmmarna. (4p)

2. En yta har formen av en halv cylinder med radie a och längd 2ℓ. Ytan är belagd med en konstant ytladdningstäthet ρ_S. Beräkna den elektriska fältstyrkan $\overline{E}$ mitt på cylinderns symmetriaxel. (OBS, endast den buktiga cylinderytan är belagd med ρ_S). (4p)



3. Området mellan två långa koaxiella metallcylindrar är fyllt med ett inhomogent dielektrikum med ledningsförmågan $\sigma = \sigma_0 \cdot R$ där R är avståndet till symmetriaxeln och σ_0 är en konstant med enheten $\Omega^{-1}m^{-2}$. Mediets relativa dielektricitetskonstant är konstant ε_r. Den inre cylinderns ytterradie är a och den yttre cylinderns innerradie är b. Bestäm a så att beloppet av den högsta elektriska fältstyrkan som uppstår i området mellan cylindrarna, $a < R < b$, minimeras. Spänningen mellan cylindrarna, U, hålls konstant. (4p)

4. Antag att vi betraktar antennen på en mobiltelefon som en oscillerande elektrisk dipol. På stort avstånd r från centrum av dipolen ges det elektriska fältet i sfäriska koordinater av:

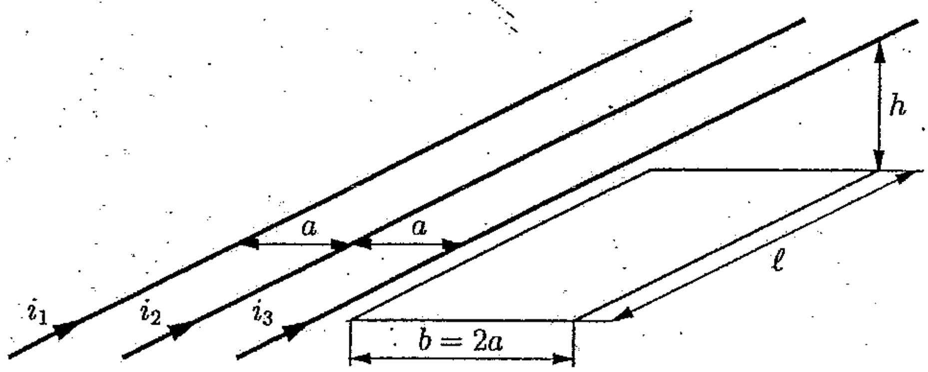
$$\overline{E} = \frac{V_0}{r}\sin(\theta)\cos(\omega t - kr)\hat{\theta}$$

där V_0 är en konstant med enheten [V]. Att $\omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ betraktas som känt och behöver inte visas.

   (a) Antag att tidsmedelvärdet av den utstrålade effekten är P och beräkna konstanten V_0. (3p)

   (b) Beräkna ett numeriskt värde på V_0 om $P = 1\,\mathrm{W}$ och $\omega = 2\pi\,900\,\mathrm{MHz}$. (Utstrålad effekt varierar i praktiken starkt men vi räknar på 1 W för att lätt kunna normera om.) (1p)

5. Teknologerna Ylva och Yngve har följande högst principiella fundering. Går det att stjäla elektrisk energi induktivt från en stor kraftledning? För att hjälpa Ylva och Yngve studerar vi en typisk 400 kV kraftledning från norrland till södra Sverige. Effektivvärdet av strömmen i en sådan varierar typiskt mellan 600 A och 800 A, avståndet mellan faserna är $a = 8\,\mathrm{m}$ och höjden över mark på lägsta punkten 8–10 m. Vi gör följande modell. Antag att strömmen i mitten fasen är $i_2(t) = I_{eff}\cos(\omega t)$ och i fasen på ena sidan $i_1(t) = I_{eff}\cos(\omega t - 2\pi/3)$ och i fasen på andra sidan $i_3(t) = I_{eff}\cos(\omega t + 2\pi/3)$ där $I_{eff} = 700\,\mathrm{A}$ och $\omega = 2\pi\,50\,\mathrm{s}^{-1}$. Antag vidare att man på marken rakt under kraftledningen lägger en egen ledning i en spole med rektangulärt tvärsnitt med bredden $b = 2a = 16\,\mathrm{m}$ och längden $\ell = 50\,\mathrm{m}$ samt att höjden över mark för kraftledningen är konstant $h = 10\,\mathrm{m}$ över marken. Beräkna hur många varv som krävs i spolen på marken för att effektivvärdet av den inducerade elektromotoriska kraften i spolen ska bli $\varepsilon_{emk,eff} = 230\,\mathrm{V}$.



Notera att det givetvis är olagligt och leder till åtal att göra detta eller något liknande i verkligheten. (4p)

Tentamen i Elektromagnetism Y TFYY53 2004-06-01

1) Strömtäthet $\bar{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z}$

Cirkulationssatsen + symmetri mm. $\oint \bar{H}\cdot d\bar{l} = I_{fri,omsl}$

$$\Rightarrow 2\pi R H(R) = \frac{I}{\pi a^2}\pi R^2 \Rightarrow \bar{H}(R) = \frac{IR}{2\pi a^2}\hat{\phi} \text{ då } 0 \le R \le a$$

$$\bar{B} = \mu_0(\bar{M}+\bar{H}) = \mu_0\mu_r\bar{H} \Rightarrow \bar{M} = (\mu_r-1)\bar{H} = (\mu_r-1)\frac{IR}{2\pi a^2}\hat{\phi} \quad 0\le R\le a$$

$$\underline{\underline{\bar{J}_m}} = \bar{\nabla}\times\bar{M} = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RM_\phi)\right]\hat{z} = \underline{\underline{\frac{(\mu_r-1)I}{\pi a^2}\hat{z}}}$$

$$\underline{\underline{\bar{J}_{sm}}} = \bar{M}\times\hat{n} = \frac{(\mu_r-1)Ia}{2\pi a^2}\hat{\phi}\times\hat{R} = \underline{\underline{\frac{(\mu_r-1)I}{2\pi a}(-\hat{z})}}$$

Svar: Magnetiseringsströmtäthet $\bar{J}_m = \frac{(\mu_r-1)I}{\pi a^2}\hat{z}$

Ytmagnetiseringsströmtäthet $\bar{J}_{sm} = \frac{(\mu_r-1)I}{2\pi a}(-\hat{z})$

---

2) $$\underline{\underline{\bar{E}(\bar{r})}} = \int_{\circledast} \frac{(\bar{r}-\bar{r}')\,dQ'}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}'|^{3/2}} = \left\{\bar{r}=\bar{0},\ \bar{r}' = a\hat{R}'+z'\hat{z},\ dQ' = \rho_s a\,d\phi' dz'\right\} =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi}\int_{-l}^{+l} \frac{-a\hat{R}'-z'\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0[a^2+(z')^2]^{3/2}}\rho_s a\,dz'd\phi' = \left\{\begin{array}{l}\text{Komposanten i } \hat{z}\text{-led blir } \bar{0}\\ \text{ty udda funktion}\\ \text{över symmetriskt intervall}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{-a^2\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\pi}^{2\pi}\left[\frac{z'}{a^2\sqrt{a^2+(z')^2}}\right]_{-l}^{+l}\hat{R}'d\phi' = \left\{\hat{R}' = \cos\phi'\hat{x}+\sin\phi'\hat{y}\right\} =$$

$$= \frac{-\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2l}{\sqrt{a^2+l^2}}\int_{\pi}^{2\pi}\cos\phi'\hat{x}+\sin\phi'\hat{y}\,d\phi' = \frac{-\rho_s l}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+l^2}}\left[\sin\phi'\hat{x}-\cos\phi'\hat{y}\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\rho_s}{\pi\varepsilon_0}\frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}}\hat{y}}}$$

Svar: $\bar{E}(\bar{0}) = \frac{\rho_s}{\pi\varepsilon_0}\frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}}\hat{y}$

3, Symmetri $\Rightarrow \bar{J} = J(R)\hat{R}$

Ansätt ström I från inre mot yttre cyl.
Ansätt en längd L på cylindrarna. $\Bigg\} \Rightarrow$

$$2\pi R L J(R) = I \Rightarrow \bar{J} = \frac{I}{2\pi L R}\hat{R} \Rightarrow \bar{E} = \bar{J}/\sigma = \frac{I}{2\pi L \sigma_0 R^2}\hat{R}$$

$$U = \int_{Ref}^{Alt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_b^a \frac{-I}{2\pi L \sigma_0 R^2}\hat{R}\cdot\hat{R}\,dR = \frac{I}{2\pi L \sigma_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{I}{2\pi L \sigma_0} = \frac{ab}{b-a}U \Rightarrow \bar{E} = \frac{abU}{(b-a)R^2}\hat{R} \qquad a < R < b$$

Vi ser att $|\bar{E}|$ är störst, E_{max}, då $R \to a \Rightarrow$

$$E_{max} = \frac{bU}{(b-a)a}$$

E_{max} har ett minimum då $(b-a)a$ har max

$$\frac{d}{da}\left[(b-a)a\right] = b - 2a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = b/2}}$$

$$\frac{d^2}{da^2}\left[(b-a)a\right] = -2 < 0 \Rightarrow \text{max} \quad \underline{\text{ok}}$$

Svar: Den högsta fältstyrkan minimeras med $a = b/2$

4, $$-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \bar{\nabla}\times\bar{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta)\hat{\phi} = \frac{kV_0}{r}\sin\theta\sin(\omega t - kr)\hat{\phi} \Rightarrow$$

$$\bar{B} = \frac{kV_0}{\omega r}\sin\theta\cos(\omega t - kr)\hat{\phi} \Rightarrow \bar{P} = \bar{E}\times\bar{H} = \bar{E}\times\bar{B}/\mu_0 =$$

$$= \frac{kV_0^2}{\mu_0\omega r^2}\sin^2\theta\cos^2(\omega t - kr)\,\hat{\theta}\times\hat{\phi} = \frac{kV_0^2}{\mu_0\omega r^2}\sin^2\theta\cos^2(\omega t - kr)\,\hat{r}$$

$$P(t) = \oint_S \bar{P}\cdot d\bar{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{kV_0^2}{\mu_0\omega r^2}\overbrace{\sin^2\theta}^{1-\cos^2\theta}\cos^2(\omega t - kr)\,\hat{r}\cdot\hat{r}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi =$$

$$= 2\pi\frac{kV_0^2}{\mu_0\omega}\cos^2(\omega t - kr)\underbrace{\left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}}_{4/3} = \frac{8\pi}{3}\frac{kV_0^2}{\mu_0\omega}\cos^2(\omega t - kr)$$

4 forts) $P = \langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \left\{T = \frac{2\pi}{\omega}\right\} = \frac{\omega}{2\pi}\,\frac{8\pi}{3}\,\frac{kV_0^2}{\mu_0\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \underbrace{\cos^2(\omega t - kr)}_{\frac{1}{2}\{1-\cos[2(\omega t - kr)]\}}\,dt =$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\,\frac{8\pi}{3}\,\frac{kV_0^2}{\mu_0\omega}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{3}\,\frac{kV_0^2}{\mu_0\omega} \Rightarrow$$

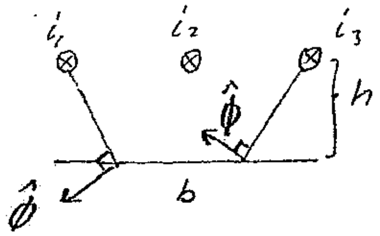
$$\underline{\underline{V_0}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}\mu_0\frac{\omega}{k}P} = \left\{\frac{\omega}{k} = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\right\} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,P}}}$$

b) $\underline{\underline{V_0}} \approx \sqrt{\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{8{,}854\cdot 10^{-12}}}\cdot 1} \approx \underline{\underline{9{,}5\text{ V}}}$

Svar: a) $V_0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,P}$ b) $V_0 \approx 9{,}5$ V

---

5)



$\left.\begin{array}{l}\text{Symmetri m.m.}\\ \oint \bar H\cdot d\bar l = I_{fri.oms.}\end{array}\right\}\ 2\pi R\,H(R) = I_{fri.oms} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar H = \frac{I_{fri.oms}}{2\pi R}\hat\phi \Rightarrow \bar B = \mu_0\bar H = \frac{\mu_0 I_{fri.oms}}{2\pi R}\hat\phi$$

Räkna flödet upp genom spolen pga i_3:

$$\Phi_3 = \int_h^{\sqrt{h^2+b^2}}\int_0^l \frac{\mu_0 i_3}{2\pi R}\hat\phi\cdot\hat\phi\,dz\,dR = \frac{\mu_0 l}{2\pi}i_3\ln\frac{\sqrt{h^2+b^2}}{h} = \frac{\mu_0 l}{4\pi}i_3\ln\left[1+\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]$$

P.s.s. för flödet upp genom spolen pga i_1:

$$\Phi_1 = -\frac{\mu_0 l}{4\pi}i_1\ln\left[1+\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]$$

Flödet pga i_2 är 0 pga symmetrin: $\Rightarrow$

$$\Phi_{tot} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{\mu_0 l}{4\pi}I_{eff}\ln\left[1+\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]\left[-\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{E}_{emk,eff}}{N} = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt} = \frac{-\mu_0 l}{4\pi}I_{eff}\ln\left[1+\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]\omega\left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 l}{4\pi}I_{eff}\ln\left[1+\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]\omega\, 2\cos\Bigg(\underbrace{\frac{\omega t + \frac{2\pi}{3} + \omega t - \frac{2\pi}{3}}{2}}_{\omega t}\Bigg)\underbrace{\sin\Bigg(\underbrace{\frac{\omega t + \frac{2\pi}{3} - \omega t + \frac{2\pi}{3}}{2}}_{\frac{2\pi}{3}}\Bigg)}_{\sqrt{3}/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\mu_0 l\omega}{4\pi}I_{eff}\ln\left[1+\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]\cos(\omega t) \approx 2{,}42\cos(\omega t) \Rightarrow N \approx \frac{230}{2{,}42} \approx 95$$

Svar: Det krävs $4\pi\mathcal{E}_{emk,eff}\Big/\left\{\sqrt{3}\mu_0 l\omega I_{eff}\ln\left[1+\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]\right\} \approx \underline{\underline{95\text{ varv.}}}$