OLOF 6

Tekniska högskolan i Linköping
Institutionen för Fysik och Mätteknik
Peter Münger
Ankn. 1893

2004-01-13

Tentamen i **TFYY53 (och TFFY39 Elektromagnetism Y)**, tisdag 13 januari 2004 kl 8.00 – 13.00.

Kursens mål: Att ge de kunskaper i elektromagnetismens grunder som krävs för studier i fysik och tillämpade elektrotekniska ämnen, samt att ge färdigheter i att lösa problem av grundläggande slag.

Tillåtna hjälpmedel:
- Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman
- Räknedosa (tömd på program och annan information)
- Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan)
- Tefyma-tabell; Ingelstam, Rönngren, Sjöberg
- Matematiska tabeller, tex Beta, är tillåtna men behövs ej

OBS Allvarligt fel i 1996 års upplaga av Physics Handbook på sidan 170:

Ska stå: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,dv$ **Står:** $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r^2}\,dv$

Frågor besvaras av Peter Münger som dyker upp minst två gånger under skrivningstiden. Lösningar sätts upp på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset efter skrivningens slut. Skrivningsresultat anslås utanför kursexpeditionen i fysikhuset senast 10 arbetsdagar efter tentamenstillfället. Skrivningen omfattar 5 problem som vardera kan ge 4 poäng; maximalt kan man alltså få 20 poäng och betygsskalan är:

Nya kursen TFYY53

Betyg	3	8–11	poäng
"	4	12–15	"
"	5	16–20	"

Gamla kursen TFFY39

Betyg	3	9–12	poäng
"	4	13–16	"
"	5	17–20	"

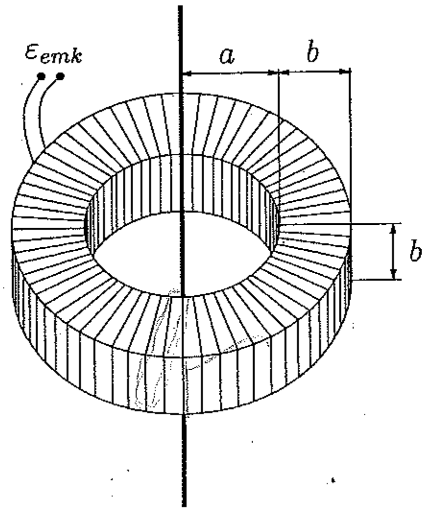
Lösningar skall om möjligt åtföljas av figur. Införda beteckningar skall definieras, ekvationer motiveras och numeriskt svar alltid skrivas ut med enhet. Orimligt svar medför noll poäng på uppgiften. Problemen är inte nödvändigtvis ordnade i svårighetsgrad.

Lycka till!

2004-01-13

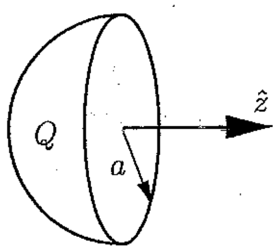
Oändligt Oändligt godtycklig

1. Figuren nedan visar en lång rak ledare längs axeln till en toroid med N varv. Detta system kallas för en Rogowski-spole och används för att mäta stora fluktuerande strömmar, speciellt stora strömimpulser. Bestäm den inducerade elektromotoriska kraften i toroiden om vi har en strömpuls i den långa ledaren som växer $\Delta I = 100\,\mathrm{A}$ under $\Delta t = 1{,}0\,\mathrm{ms}$. $N = 1000$, $a = 5{,}0\,\mathrm{cm}$, $b = 3{,}0\,\mathrm{cm}$. Både ett analytiskt och ett numeriskt svar krävs för full poäng. (4p)

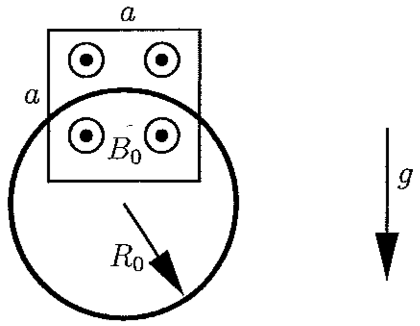


2. Området mellan två koaxiella cylindrar av metall är fyllt med ett material som har en konstant ledningsförmåga σ. Den yttre cylindern har en innerradie som är b och den inre cylinderns ytterradie är a. Cylindrarnas längd är L och potential skillnaden mellan cylindrarna är U. Sök den radie a som minimerar den maximala strömtätheten som uppstår någonstans mellan cylindrarna. (4p)

3. Ett hemisfäriskt skal med radien $a = 10\,\mathrm{cm}$ har en total laddning $Q = 10^{-10}\,\mathrm{C}$ som bildar en konstant ytladdningstäthet ρ_S. Bestäm den elektriska fältstyrkan i centrum av en sfär vars ena halva utgörs av hemisfären. Både riktning och belopp krävs för full poäng. (4p)



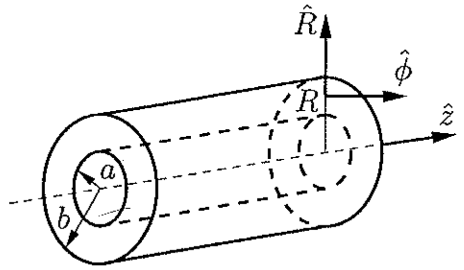
4. En cirkulär ring gjord av en tunn ledande tråd faller fritt, med sitt plan vertikalt, i ett horisontellt homogent magnetfält mellan polerna på en permanentmagnet. Ringens radie är $R_0 = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ och den är gjord av en aluminiumtråd med radien $r_0 = 1{,}0\,\mathrm{mm}$. Ringen faller symmetriskt i gapet mellan polerna som är kvadratiska med sidlängden $a = 2{,}0\,\mathrm{cm}$. Magnetfältet antas vara homogent mellan polerna $B_0 = 0{,}50\,\mathrm{T}$ och noll annars. Aluminiums densitet är $\rho_g = 2{,}70 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ och dess resistivitet är $\rho_\Omega = 2{,}65 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$. Beräkna ringens jämviktshastighet då den är på väg ut ur fältet. Både ett analytiskt och ett numeriskt svar krävs för full poäng. (4p)



5. En mycket lång koaxialkabel består av en cylindrisk innerledare med ytterradie a och en koaxiell cylindrisk ytterledare med innerradie b. Båda cylindrarna antas vara perfekta ledare. Området mellan cylindrarna är fyllt med en isolator som beskrivs av en konstant relativ dielektricitetskonstant ε_r och en konstant relativ permeabilitet μ_r. Den elektriska fältstyrkan mellan cylindrarna ges i cylinderkoordinater av:

$$\overline{E}(R, z, t) = \frac{V_0}{R \ln(b/a)} \cos(kz - \omega t)\hat{R},$$

där k och ω är konstanter samt t är tiden. V_0 är en konstant relaterad till spänningen över koaxialkabeln.



(a) Beräkna den magnetiska flödestätheten $\overline{B}$ mellan cylindrarna. Eventuella tidsoberoende bidrag kan sättas till noll. (1p)

(b) Härled fashastigheten ω/k uttryckt i ε_r, ε_0, μ_r och μ_0 utgående från Maxwells ekvationer. (1p)

(c) Beräkna tidsmedelvärdet av den i koaxialkabeln transporterade effekten. (2p) tamen i Elektromagnetism Y, TFYY53 2004-01-13

$$\left.\begin{array}{l}\text{Symmetri m.m.} \Rightarrow \bar{H} = H(R)\hat{\phi} \\ \text{Cirkulationssatsen } \oint \bar{H}\, d\bar{l} = I_{\text{oms. fri}}\end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^{2\pi} H(R)\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\, R\, d\phi = I$$

2004 -01- 13

$$\Rightarrow H(R) = \frac{I}{2\pi R} \Rightarrow \bar{B} = \mu_0 \bar{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi} \Rightarrow$$

Magnetiska flödet i toroiden $\Phi = \int \bar{B}\cdot d\bar{S} \Rightarrow$

$$\Phi = \int_0^b\int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\, dR\, dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\Big[\ln R\Big]_a^{a+b}\Big[z\Big]_0^b = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) I \quad \text{för } N \text{ varv } \Phi_{tot} = N\Phi$$

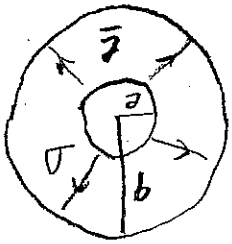
$$\mathcal{E}_{emk} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\frac{dI}{dt} = \left\{\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta I}{\Delta t}\right\} =$$

$$= -N\frac{\mu_0 b}{2\pi}\frac{\Delta I}{\Delta t}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \approx -0,28\ \text{V}$$

Svar: $\mathcal{E}_{emk} = \dfrac{N\mu_0 b}{2\pi}\dfrac{\Delta I}{\Delta t}\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \approx 0.28\ \text{V}$

---

2)



Cyl. Ansätt ström I från inre till yttre.

Cylinder sym. $\Rightarrow \bar{J} = J(R)\hat{R}$

$$I = \int \bar{J}\cdot d\bar{S} = \int_0^L\int_0^{2\pi} J(R)\hat{R}\cdot\hat{R}\, R\, d\phi\, dz = 2\pi R L\, J(R) = I$$

$$\Rightarrow \bar{J} = \frac{I}{2\pi L R}\hat{R} \Rightarrow \bar{E} = \bar{J}/\sigma = \frac{I}{2\pi\sigma L R}\hat{R} \Rightarrow$$

$$U = \int_{Ref}^{A\ddot{l}l} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_b^a -\frac{I}{2\pi\sigma L R}\hat{R}\cdot\hat{R}\, dR = \frac{I}{2\pi\sigma L}\ln b/a \Rightarrow$$

$$\frac{I}{2\pi\sigma L} = \frac{U}{\ln b/a} \Rightarrow \bar{J} = \frac{U}{R\ln b/a}\hat{R}$$ är som störst när $R = a$

$$\Rightarrow J_{max} = \frac{U}{a\ln b/a}$$ minst när $f(a) = a\ln b/a$ har max.

$$\frac{df(a)}{da} = \ln b - \ln a - \frac{a}{a} = 0 \Rightarrow \ln b/a = 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = e \Rightarrow a = b/e$$

$$\frac{d^2 f(a)}{da} = -\frac{1}{a} < 0 \Rightarrow \max.$$

Svar: Den maximala strömtätheten är minst när $a = b/e$

$$\underline{\underline{\bar E(\bar r)}} = \int_{\circledast} \frac{(\bar r - \bar r')\,dQ^*}{4\pi\varepsilon_0|\bar r-\bar r'|^3} = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{(\bar 0 - r'\hat r')}{4\pi\varepsilon_0|\bar 0 - r'\hat r'|^3}\varrho_s (r')^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi =$$

2004 -01- 13

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{-a^3\hat r'\varrho_s}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\sin\theta\,d\theta\,d\phi = \left\{\hat r' = \cos\theta\,\hat z + \sin\theta\,\hat R\right\} =$$

$\bar 0$ ty $0 \to 2\pi$

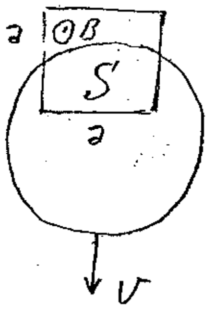
$$= \frac{-\varrho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\theta\cos\theta\,\hat z + \cancel{\sin^2\theta\,\hat R}\right]d\phi\,d\theta = \frac{-\varrho_s}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\underbrace{\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi}}_{-1/2}\hat z =$$

$$= \frac{\varrho_s}{4\varepsilon_0}\hat z = \left\{\varrho_s = \frac{Q}{4\pi a^2/2} = \frac{Q}{2\pi a^2}\right\} = \underline{\underline{\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^2}\hat z}}$$

Svar: Elektriska fältstyrkan i origo är: $\underline{\underline{\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^2}\hat z}}$

---

4)



Magnetiskt flöde genom ringen minskar då arean S minskar ty

$$\Phi = BS \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = B\cdot(-av) = -Bav$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{emk} = -\frac{d\Phi}{dt} = Bav$$

Effektutvecklingen i ringen: $P = "V\cdot I" = "\frac{V^2}{R_\Omega}" = \frac{(Bav)^2}{R_\Omega}$

Ringens resistans: Ansätt ström I i ringen $\Rightarrow$

$$J = \frac{I}{\pi r_0^2} \Rightarrow E = \varrho_\Omega J = \frac{\varrho_\Omega I}{\pi r_0^2} \Rightarrow U = 2\pi R_0 E = \frac{2R_0\varrho_\Omega I}{r_0^2} \Rightarrow$$

$$R_\Omega = \frac{U}{I} = \frac{2R_0\varrho_\Omega}{r_0^2} \Longrightarrow P = \frac{(r_0 Bav)^2}{2R_0\varrho_\Omega}$$

Tillförd effekt: $\frac{d}{dt}$("Massan × höjden × gravitationen") =

$$= 2\pi R_0\pi r_0^2\varrho_g\cdot v\cdot g = P = \frac{(r_0 Bav)^2}{2R_0\varrho_\Omega} \Rightarrow v = \frac{4\pi^2R_0^2\varrho_g\varrho_\Omega g}{a^2B^2} \approx$$

$\approx 0{,}25$ m/s

Svar: Jämviktshastigheten blir $\underline{\underline{v = \frac{4\pi^2 R_0^2\varrho_g\varrho_\Omega g}{a^2B^2} \approx 0{,}25\ \frac{m}{s}}}$

$$-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \bar{\nabla} \times \bar{E} = \frac{\partial E_R}{\partial z}\hat{\phi} = \frac{-V_0 k}{R \ln(b/a)} \sin(kz-wt)\hat{\phi} \Rightarrow \underline{\bar{B} = \frac{V_0 k}{w R \ln(b/a)} \cos(kz-wt)\hat{\phi}}$$

$$\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H}, \quad \bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E}, \quad \bar{J} = \bar{0}, \quad \bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \Rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{B} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial B_\phi}{\partial z}\hat{R} = \underline{\frac{V_0 k^2}{w R \ln(b/a)} \sin(kz-wt)\hat{R}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} =$$

2004-01-13

$$= \underline{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{V_0 w}{R \ln(b/a)} \sin(kz-wt)\hat{R}} \quad \Rightarrow \underline{\left(\frac{w}{k}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

c) $$\bar{P} = \bar{E} \times \bar{H} = \frac{V_0}{R \ln(b/a)} \cos(kz-wt)\hat{R} \times \frac{V_0 k \cos(kz-wt)}{\mu_0 \mu_r w R \ln(b/a)}\hat{\phi} =$$

$$= \frac{V_0^2 k}{\mu_0 \mu_r w}\left[\frac{\cos(kz-wt)}{R \ln(b/a)}\right]^2 \hat{z}$$

Momentant transporterad effekt: $P(t) = \int \bar{P}(t) \cdot d\bar{S} =$

$$= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{V_0^2 k}{\mu_0 \mu_r w R^2}\left[\frac{\cos(kz-wt)}{\ln(b/a)}\right]^2 \hat{z} \cdot \hat{z}\, R\, d\phi\, dR =$$

$$= \frac{2\pi V_0^2 k}{\mu_0 \mu_r w \ln(b/a)} \cos^2(kz-wt) \Rightarrow$$

Tidsmedelvärdet av transporterad effekt:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{\frac{2\pi}{w}} \int_0^{\frac{2\pi}{w}} \frac{2\pi V_0^2 k}{\mu_0 \mu_r w \ln(b/a)} \cos^2(kz-wt)\,dt =$$

$$= \frac{\pi V_0^2 k}{\mu_0 \mu_r w \ln(b/a)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \frac{\pi V_0^2}{\ln(b/a)}$$

Svar: a) $\bar{B} = \frac{V_0 k}{w R \ln(b/a)} \cos(kz-wt)\hat{\phi}$

b) $\frac{w}{k} = \pm 1/\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}$

c) $\langle P \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \frac{\pi V_0^2}{\ln(b/a)}$