8

Tekniska högskolan i Linköping
Institutionen för Fysik och Mätteknik
Peter Münger
Ankn. 1893

Tentamen i **TFYY53** (och **TFFY39 Elektromagnetism Y**), tisdag 26 augusti 2003 kl 8.00 – 13.00.

Kursens mål: Att ge de kunskaper i elektromagnetismens grunder som krävs för studier i fysik och tillämpade elektrotekniska ämnen, samt att ge färdigheter i att lösa problem av grundläggande slag.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman
Räknedosa (tömd på program och annan information)
Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan)
Tefyma-tabell; Ingelstam, Rönngren, Sjöberg
Matematiska tabeller, tex Beta, är tillåtna men behövs ej

OBS Allvarligt fel i 1996 års upplaga av Physics Handbook på sidan 170:

Ska stå: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,dv$ **Står:** $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r^2}\,dv$

Frågor besvaras av Peter Münger som dyker upp minst två gånger under skrivningstiden. Lösningar sätts upp på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset efter skrivningens slut. Skrivningsresultat anslås utanför kursexpeditionen i fysikhuset senast 10 arbetsdagar efter tentamenstillfället. Skrivningen omfattar 5 problem som vardera kan ge 4 poäng; maximalt kan man alltså få 20 poäng och betygsskalan är:

Nya kursen TFYY53

Betyg	3	8 – 11	poäng
"	4	12 – 15	"
"	5	16 – 20	"

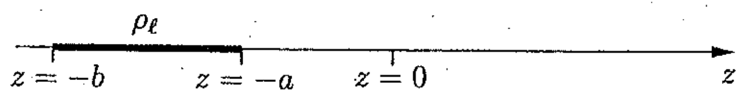
Gamla kursen TFFY39

Betyg	3	9 – 12	poäng
"	4	13 – 16	"
"	5	17 – 20	"

Lösningar skall om möjligt åtföljas av figur. Införda beteckningar skall definieras, ekvationer motiveras och numeriskt svar alltid skrivas ut med enhet. Orimligt svar medför noll poäng på uppgiften. Problemen är inte nödvändigtvis ordnade i svårighetsgrad.

Lycka till!

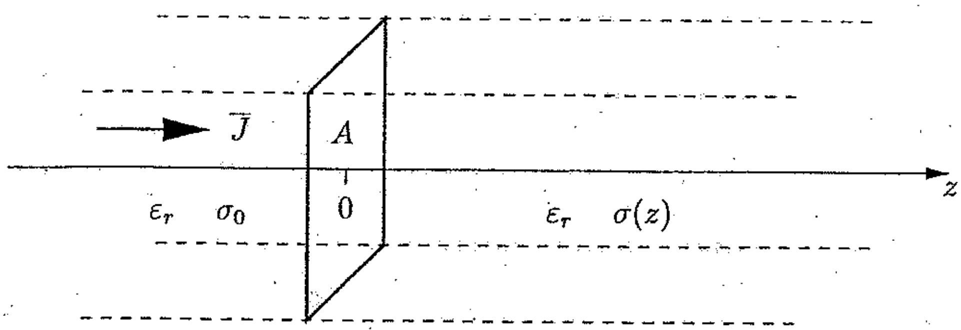
1. Figuren nedan illustrerar en smal stav som belagts med en konstant linjeladdningstäthet ρ_ℓ med dimensionen [C/m]. En partikel med laddning $-q$ rör sig längs z-axeln. Partikeln startar utan begynnelsehastighet på stort avstånd, $z = +\infty$. Beräkna partikelns kinetiska energi då den passerar origo dvs vid $z = 0$. *Uppgiften kan lösas på flera sätt. Ett av sätten är mycket enklare än andra.* (4p)



2. Figuren nedan illustrerar ett material med en strömtäthet $\overline{J} = J\hat{z}$. För $z < 0$ har vi en konstant ledningsförmåga σ_0. För $z > 0$ varierar däremot ledningsförmågan enligt sambandet $\sigma(z) = \sigma_0(a + z)^2/a^2$ där a är en konstant med dimensionen [m]. Relativa dielektricitetskonstanten ε_r är konstant i hela materialet. Vi betraktar en volym som har tvärsnittsyta A vid $z = 0$ (se figur) och obegränsad utsträckning i positiv z-riktning. Vi förutsätter stationärt tillstånd och att $\overline{J}$ är konstant i hela materialet.

   (a) Beräkna resistansen mellan planet $z = 0$ och ett motsvarande plan med mycket stor z-koordinat. *(Trots att volymen är oändligt lång kan resistansen bli ändlig om bara ledningsförmågan ökar tillräckligt snabbt. Detta fungerar givetvis bara i teorin.)* (2p)

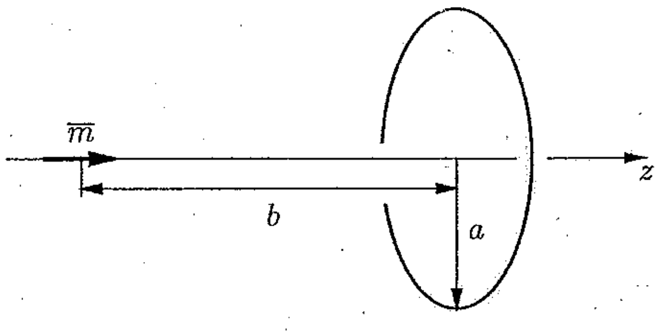
   (b) Beräkna den totala fria laddning som ansamlats i regionen med tvärsnitt A och $z > 0$. (2p)



3. Som bekant kan det jordmagnetiska fältet approximativt beskrivas med fältet från en magnetisk dipol. Vi vet också att en strömslinga som befinner sig i en magnetiskflödestäthet kan påverkas av en nettokraft. *Borde inte detta kunna utnyttjas av flygfarkoster?* Du ska undersöka just detta!

   (a) Betrakta en trådformig cirkulär strömslinga med radie a. Slingans centrum befinner sig på avståndet b från ett magnetiskt dipolmoment $\overline{m} = m\hat{z}$. Låt slingan föra en likström I i en sådan omloppsriktning att slingan repelleras av dipolen. Beräkna ett uttryck för kraften på slingan. Lösningen skall innehålla en tydlig figur där den *korrekta strömriktningen framgår* ($m > 0$). (3p)

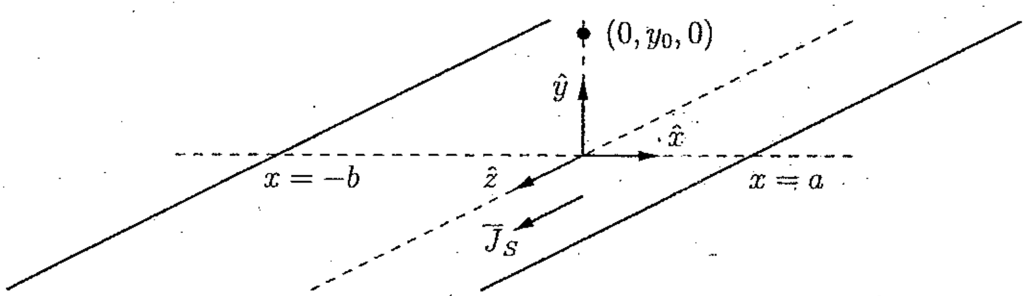
   (b) Antag nu att ett flygande tefat är placerat på Antarktis dvs rakt över jordens magnetiska nordpol. Längs tefatets cirkulära pereferi går en konstant ström. Frågan är nu hur stor denna behöver vara för att magnetiska kraften skall balansera tyngdkraften. Tefatets radie är 10 m, massan är 1000 kg, jordradien är $6{,}4 \cdot 10^6$ m och magnetiska dipolmomentet har styrkan $0{,}82 \cdot 10^{23}$ Am^2. *Det kan tänkas att din räkning ger en så stor strömstyrka att flygning med denna metod blir praktiskt taget omöjlig till och med om man använder en supraledande ring. Även om så inte är fallet stöter man på andra problem – men det kan du ju fundera på hemma.)* (1p)



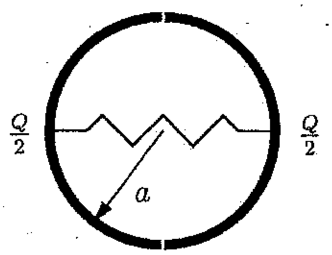
4. Inom elektromagnetismen studeras ofta oändliga trådar och oändliga plan. Den fysikaliska intuitionen kan då slå fel – ofta gör den det i samband med oändliga plan. (Läroboksförfattare brukar tyvärr inte observera detta.) Antag att vi har ett tunt ledande skikt som ligger i xz-planet. Skiktet för en konstant ytströmtäthet $\overline{J}_S = J_S\hat{z}$. Skiktet har oändlig utsträckning i z-riktningen men är begränsat av $-b \leq x \leq a$ i x-led. Vi söker nu magnetiska flödestätheten $\overline{B}$ i en fältpunkt $(0, y_0, 0)$ där $y_0 > 0$.

   (a) Beräkna ett uttryck för $\overline{B}$ i fältpunkten under ovanstående förutsättningar. (3p)

   (b) Vi låter nu planet bli oändligt brett. I de flesta läroböcker får man intrycket att resultatet blir entydigt det vill säga oberoende av relationen mellan a och b. Du kan nu lätt visa att så inte är fallet. Välj till exempel $b = \alpha a$, där α är en godtycklig dimensionslös konstant, och låt $a \to \infty$. Vad blir $\overline{B}(0, y_0, 0)$ nu? (1p)



5. En ledande sfär med radien $a = 10\,\text{cm}$ är delad på mitten. Halvorna hålls ihop av en fjäder inuti sfären. Sfären befinner sig i luft. Den har laddats upp så mycket som möjligt utan att ett elektriskt genomslag skett. Sfärens laddning är då $Q = 3{,}3\,\mu\text{C}$. Bestäm kraften i fjädern orsakad av laddningen. (4p)



Tentamen i Elektromagnetism Y, TFYY53 o TFFY39 26/8-03

1, Beräkna först potentialen i origo, relativt ∞.

$$V(\bar r)=\int_{*}\frac{dQ'}{4\pi\varepsilon_0|\bar r-\bar r'|}=\int_{-b}^{-a}\frac{\rho_\ell\,dz'}{4\pi\varepsilon_0|z'|}=\left\{\begin{matrix}|z'|=-z'\\ \text{ty } -b\le z'\le -a\end{matrix}\right\}=\int_{-b}^{-a}\frac{\rho_\ell\,dz'}{4\pi\varepsilon_0(-z')}=$$

$$=\frac{-\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\ln z'\Big]_{-b}^{-a}=\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Potentiell energi för partikeln i origo relativt ∞:

$$E_p=-q\,V(\bar r=\bar o)=\frac{-q\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\ln b/a$$

Vid $z=+\infty$

Energikonservering: $E_p+E_k=0+0\Rightarrow E_k=-E_p=\frac{q\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$

Svar: Kinetiska energin blir $E_k=\frac{q\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\ln b/a$

2, a) $\bar J=J\hat z=\sigma\bar E\Rightarrow\bar E=\bar J/\sigma=\frac{a^2J}{\sigma_0(a+z)^2}\hat z$

$$V=\int_{Ref}^{Alt}-\bar E\cdot d\bar\ell=\int_{\infty}^{0}-\frac{a^2J}{\sigma_0(a+z)^2}\hat z\cdot\hat z\,dz=\frac{a^2J}{\sigma_0}\left[\frac{1}{(a+z)}\right]_{\infty}^{0}=\frac{aJ}{\sigma_0}$$

Spänningen över resistorn

Ström genom resistorn

$$I=\int\bar J\cdot d\bar S=\int J\hat z\cdot\hat z\,dS=JA$$

Resistansen $\underline{R_a}=V/I=\frac{aJ}{\sigma_0 JA}=\underline{\underline{\frac{a}{\sigma_0A}}}$

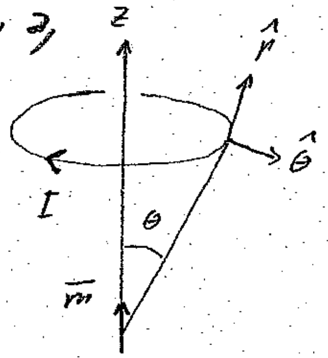
b, $\bar D=\varepsilon_0\varepsilon_r\bar E=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r a^2J}{\sigma_0(a+z)^2}\hat z$; $\rho_f=\bar\nabla\cdot\bar D=\frac{\partial D}{\partial z}=\frac{-2\varepsilon_0\varepsilon_r a^2J}{\sigma_0(a+z)^3}$

$$\Rightarrow\underline{\underline{Q_f}}=\int_\tau\rho_f\,d\tau=\iint_0^{\infty}\frac{-2\varepsilon_0\varepsilon_r a^2J}{\sigma_0(a+z)^3}dz\,dA=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r a^2J}{\sigma_0}\left[\frac{1}{(a+z)^2}\right]_0^{\infty}A=\underline{\underline{\frac{-\varepsilon_0\varepsilon_rA}{\sigma_0}J}}$$

Svar: a) Resistansen är: a/σ_0A

b, Totala fria laddningen är: $-\varepsilon_0\varepsilon_rAJ/\sigma_0$

3, a) 2003 -08- 26



$$\bar B = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat r + \sin\theta\,\hat\theta\right)$$

$$d\bar F_m = I\,d\bar l \times \bar B = I a\,d\phi\,\hat\phi \times \bar B$$

$$\bar F_m = \int I\,d\bar l \times \bar B = \int_{2\pi}^{0}\left[I a\,\overbrace{\hat\phi \times \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\underbrace{\left(2\cos\theta\,\hat r + \sin\theta\,\hat\theta\right)}_{-\hat r}}^{\hat\theta}\right]d\phi$$

← strömmen går i $-\hat\phi$-riktning

$$= \frac{I a \mu_0 m}{4\pi r^3}\int_{2\pi}^{0}\left(2\cos\theta\,\hat\theta - \sin\theta\,\hat r\right)d\phi$$

Av symmetri skäl överlever bara $\hat z$-komp. ej $\hat R$-komp.

$\hat\theta\cdot\hat z = -\sin\theta$, $\hat r\cdot\hat z = \cos\theta$ $\Rightarrow$

$$\bar F_m = \frac{I a \mu_0 m}{4\pi r^3}\int_{2\pi}^{0}\left(-2\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta\right)d\phi\,\hat z =$$

$$= \frac{I a \mu_0 m}{2 r^3}\,3\sin\theta\cos\theta\,\hat z$$

Skriv om uttrycket i givna storheter:

$$\underline{\underline{\bar F_m}} = \frac{I a \mu_0 m}{2 r^3}\cdot 3\,\frac{a}{r}\cdot\frac{b}{r}\,\hat z = \underline{\underline{\frac{I a^2 b \mu_0 m\, 3}{2\left(a^2+b^2\right)^{5/2}}\,\hat z}}$$

b) Approximera att $a \ll b$ $\Rightarrow$

$$\bar F_m \approx \frac{3 I a^2 \mu_0 m}{2 b^4}\,\hat z = m_T\cdot g\,\hat z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I = \frac{2 b^4 m_T g}{3 a^2 \mu_0 m} \approx 1{,}1\cdot 10^{12}\,A}}$$

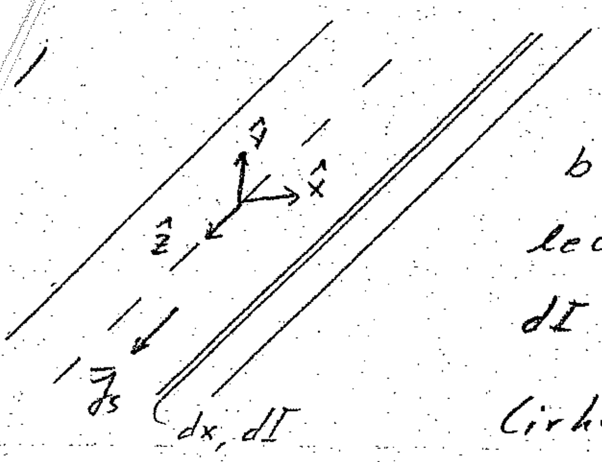
[Det är en instabil jämviktspunkt. Jämför med två stavmagneter med nordända mot varandra!]

Svar a) Kraften blir: $\underline{\underline{\dfrac{I a^2 b \mu_0 m\, 3}{2\left(a^2+b^2\right)^{5/2}}\,\hat z}}$

b) Strömmen som krävs är: $\dfrac{2 b^4 m_T g}{3 a^2 \mu_0 m} \approx \underline{\underline{1{,}1\cdot 10^{12}\,A}}$

2003 -08- 26

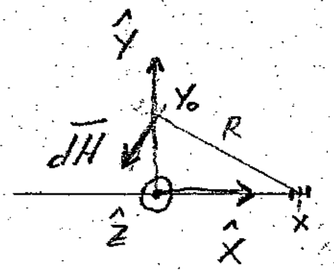
1



Betrakta en smal strimma av bandet som en lång tunn rät ledare vid x som för strömmen

$dI = J_s\,dx$

Cirkulationssatsen: $\oint \bar H \cdot d\bar l = I_{\text{omsl}}$



$$\Longrightarrow 2\pi R\, dH(R) = dI \Rightarrow dH(R) = \frac{dI}{2\pi R}$$

Ur figur: $d\bar H(R) = \frac{dI}{2\pi R}\cdot\left(\frac{-y_0}{R}\hat x - \frac{x}{R}\hat y\right) \Rightarrow$

$$d\bar B = \mu_0\, d\bar H = \frac{-\mu_0 J_s}{2\pi}\,\frac{(y_0\hat x + x\hat y)}{(x^2+y_0^2)}\,dx \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\bar B}} = -\int_{-b}^{a} \frac{\mu_0 J_s}{2\pi}\,\frac{(y_0\hat x + x\hat y)}{(x^2+y_0^2)}\,dx = \frac{-\mu_0 J_s}{2\pi}\left[\frac{y_0}{y_0}\arctan\frac{x}{y_0}\,\hat x + \frac{1}{2}\ln|x^2+y_0^2|\,\hat y\right]_{-b}^{a}$$

$$\underline{\underline{= \frac{-\mu_0 J_s}{2\pi}\left[\left(\arctan\frac{a}{y_0} + \arctan\frac{b}{y_0}\right)\hat x + \frac{1}{2}\ln\frac{a^2+y_0^2}{b^2+y_0^2}\,\hat y\right]}}$$

b) Med $b = \alpha a$ och $a \to \infty$ får vi:

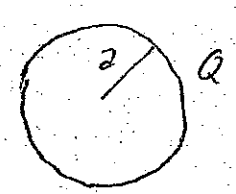
$$\left.\begin{array}{l} \arctan\frac{a}{y_0} \to \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \arctan\frac{b}{y_0} = \arctan\frac{\alpha a}{y_0} \to \frac{\pi}{2} \\ \ln\frac{a^2+y_0^2}{(\alpha a)^2+y_0^2} \approx \ln\frac{a^2}{\alpha^2 a^2} = -2\ln\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\bar B \longrightarrow -\frac{\mu_0 J_s}{2\pi}\left[\pi\hat x - \ln\alpha\,\hat y\right]}}$$

Svar a) $\bar B = \frac{-\mu_0 J_s}{2\pi}\left[\left(\arctan\frac{a}{y_0} + \arctan\frac{b}{y_0}\right)\hat x + \frac{1}{2}\ln\frac{a^2+y_0^2}{b^2+y_0^2}\,\hat y\right]$

b) $\underline{\underline{\bar B \longrightarrow \frac{-\mu_0 J_s}{2\pi}\left[\pi\hat x - \ln\alpha\,\hat y\right]}}$

5,



$$\left.\begin{array}{l}\text{Sfärisk symmetri} \Rightarrow \bar{D} = D(r)\hat{r} \\ \text{Gauss sats} \quad \oint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q_{\text{fri,innes}}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$4\pi r^2 D(r) = Q_{\text{fri,innes}} \Rightarrow \bar{D}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} & ; r > a \\ \bar{0} & ; 0 < r < a \end{cases}$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\bar{E} = \varepsilon_0\bar{E} \Rightarrow \bar{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & ; r > a \\ \bar{0} & ; 0 < r < a. \end{cases}$$

$$W_e = \int_{\substack{\text{"Hela"} \\ R^3}} \frac{1}{2}\bar{E}\cdot\bar{D}\,d\tau = \underbrace{\iint_a^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_0 r^4}\cdot r^2\,dr\,d\Omega}_{\text{utanför sfären}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{innuti sfären} \\ \text{ty } \bar{E},\bar{D} = \bar{0}}}{0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_a^\infty \cdot 4\pi = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

Vi ser att W_e minskar om a ökar.

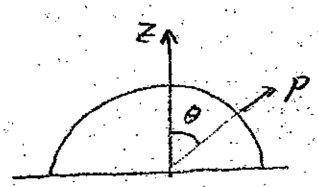
$$\bar{F}_e = -\nabla W_e \Rightarrow F_e = -\frac{\partial W_e}{\partial a} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$$

F_e är en elektrostatisk kraft, utsmetad över hela sfärens yta, som vill öka sfärens radie.

Dvs, ett utåtriktat tryck $p = \frac{F}{A} = \frac{F}{4\pi a^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2\cdot 4\pi a^2}$

Studera en halva:

Kraft i z-riktning: $F_z = \int_{\substack{\text{Halv} \\ \text{sfär}}} p\hat{r}\cdot\hat{z}\,dS =$



$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2\cdot 4\pi a^2}\cdot\cos\theta\, a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2\cdot 4\pi}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2} \approx 1{,}22\ N$$

Svar: Kraften är: $\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2} \approx 1{,}22\,N$