6

Tekniska högskolan i Linköping
Institutionen för Fysik och Mätteknik
Peter Münger
Ankn. 1893

2003 -06- 02

Tentamen i **TFYY53 (och TFFY39 Elektromagnetism Y)**, måndag 2 juni 2003 kl 14.00 – 19.00.

Kursens mål: Att ge de kunskaper i elektromagnetismens grunder som krävs för studier i fysik och tillämpade elektrotekniska ämnen, samt att ge färdigheter i att lösa problem av grundläggande slag.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman
Räknedosa (tömd på program och annan information)
Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan)
Tefyma-tabell; Ingelstam, Rönngren, Sjöberg
Matematiska tabeller, tex Beta, är tillåtna men behövs ej

OBS Allvarligt fel i 1996 års upplaga av Physics Handbook på sidan 170:

Ska stå: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,dv$ **Står:** $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r^2}\,dv$

Frågor besvaras av Peter Münger som dyker upp minst två gånger under skrivningstiden. Lösningar sätts upp på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset efter skrivningens slut. Skrivningsresultat anslås utanför kursexpeditionen i fysikhuset senast 10 arbetsdagar efter tentamenstillfället. Skrivningen omfattar 5 problem som vardera kan ge 4 poäng; maximalt kan man alltså få 20 poäng och betygsskalan är:

Nya kursen TFYY53

Betyg	3	8–11	poäng
"	4	12–15	"
"	5	16–20	"

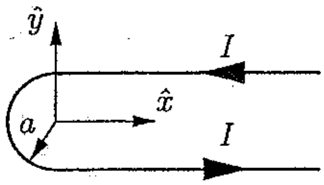
Gamla kursen TFFY39

Betyg	3	9–12	poäng
"	4	13–16	"
"	5	17–20	"

Lösningar skall om möjligt åtföljas av figur, införda beteckningar skall definieras, ekvationer motiveras och numeriskt svar alltid skrivas ut med enhet. Orimligt svar medför noll poäng på uppgiften. Problemen är inte nödvändigtvis ordnade i svårighetsgrad.

Lycka till!

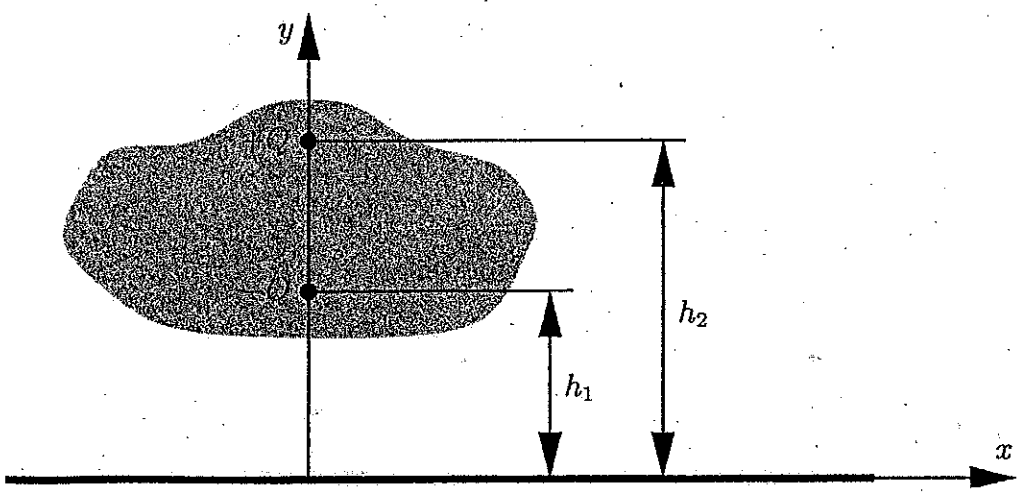
1. En hårnålsformad tunn ledares parallella skänklar är mycket långa och befinner sig på avståndet $2a$ från varandra. (Se figur nedan.) Skänklarna är förenade av en halvcirkelformad del med centrum i origo. Hela ledaren befinner sig i xy-planet och för strömmen I.



   (a) Beräkna den magnetiska vektorpotentialen, $\overline{A}$, i origo. (2p)

   (b) Beräkna den magnetiska flödestätheten, $\overline{B}$, i origo. (2p)

2. Ett åskmoln kan beskrivas som en elektrisk dipol med laddning $Q = \pm 10\,\text{C}$. Molnets botten är på höjden $h_1 = 5{,}0\,\text{km}$ över marken och toppen är $h_2 = 8{,}0\,\text{km}$ över marken. Marken är våt och kan betraktas som en god ledare.



   (a) Bestäm potentialen $V(x)$ i en punkt på marken där x är avståndet från en punkt på marken rakt under molnet till den aktuella punkten. Se xy koordinatsystemet i figuren. Ange ett numeriskt värde när $x = 6{,}0\,\text{km}$. (1p)

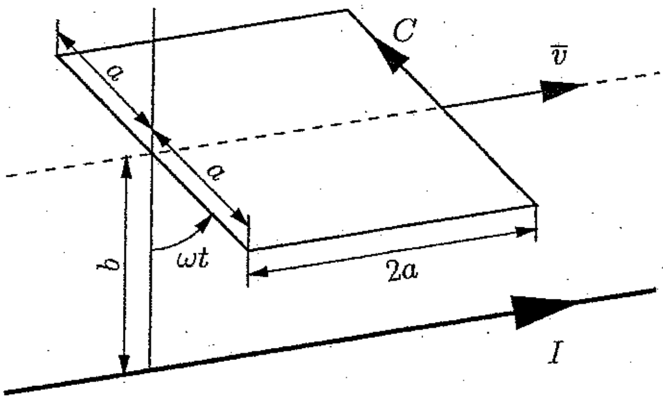
   (b) Bestäm elektriska fältstyrkan $\overline{E}(x)$ omedelbart ovanför marken vid samma punkt, $x = 6{,}0\,\text{km}$. (2p)

   (c) Bestäm ytladdningstätheten $\rho_S(x)$ på marken vid samma punkt, $x = 6{,}0\,\text{km}$. (1p)

3. Området mellan två koncentriska sfäriska metallskal är fyllt med ett material med en ledningsförmåga som varierar med radien r som $\sigma = \sigma_0/r$ där σ_0 är en konstant med enheten $[\Omega^{-1}]$. Mellan skalen ligger en konstant spänning U. Det yttre skalet har radien b. Hitta det värde på det inre skalets radie a som gör att den maximala strömtäthet, som uppstår någonstans mellan skalen, blir så låg som möjligt. (4p)

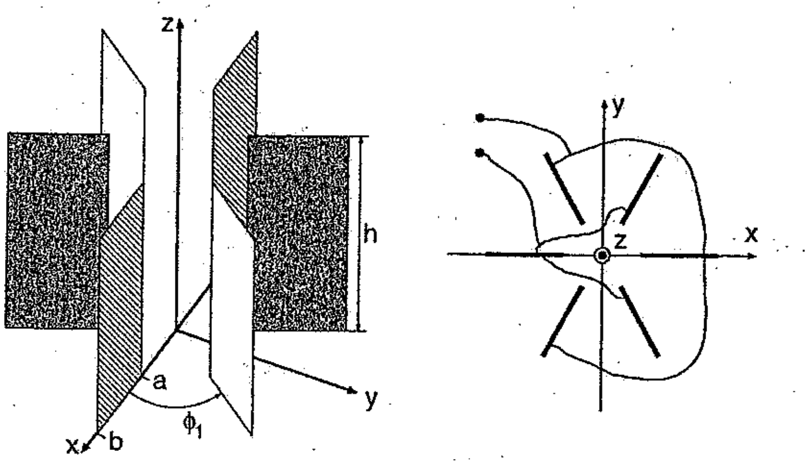
2003 -06- 02

4. Sök ett uttryck för den elektromotoriska kraft som induceras i slingan C i nedanstående figur.



Slingan utgörs av en kvadrat med sidolängd $2a$ som roterar med vinkelfrekvensen ω runt en axel, streckade linjen, som är parallell med två av kvadratens kanter och går genom kvadratens centrum. En oändligt lång rät ledare som för en likström I går på ett avstånd $b > a$ parallellt med rotationsaxeln. Förutom att rotera har slingan även en konstant hastighet $\overline{v}$ längs den streckade linjen. Tiden $t = 0$ har valts så att kvadratens yta och den oändliga räta ledaren då ligger i ett gemensamt plan. Den sökta elektromotoriska kraften skall räknas positiv i slingan Cs riktning. (4p)

5. Betrakta en kondensator bestående av sex stora metallplan enligt figurerna. Samtliga plan är mycket tunna och beskrivs i cylinderkoordinater med $0 \leq z \leq h$, $a \leq R \leq b$ och med $\phi_i = \frac{i\pi}{3}$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Planen med udda i är sinsemellan förbundna med en tunn tråd och utgör ena belägget i kondensatorn. Planen med jämna i är också sinsemellan förbundna med en tunn tråd och utgör det andra belägget i kondensatorn. Mellan planen är det vakuum och vi antar att potentialen $V(R, \phi, z)$ är oberoende av R och z mellan planen. Beräkna under dessa förutsättningar kondensatorns kapacitans.
(Tips: Poissons' ekvation mellan två plan och koppla ihop!) (4p)



Tentamen i Elektromagnetism Y, TFYY53, 03-06-02

2003 -06- 02

1 a)
$$\bar A = \int_C \frac{\mu_0 I\, d\bar l'}{4\pi|\bar r-\bar r'|} = \underbrace{\int_{+\infty}^{0}\frac{\mu_0 I\, dx'\hat x}{4\pi\sqrt{a^2+(x')^2}} + \int_{0}^{\infty}\frac{\mu_0 I\, dx'\hat x}{4\pi\sqrt{a^2+(x')^2}}}_{0 \text{ ty tar ut varandra!}} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\mu_0 I(-\sin\phi\,\hat x+\cos\phi\,\hat y)a\,d\phi}{4\pi a}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Big[\cos\phi\,\hat x+\sin\phi\,\hat y\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(-2\hat y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\hat y$$

b)
$$\bar B = \int_C \frac{\mu_0 I\, d\bar l'\times(\bar r-\bar r')}{4\pi|\bar r-\bar r'|^3} = \int_{+\infty}^{0}\frac{\mu_0 I\, dx'\,\overbrace{\hat x\times[\bar 0-(x'\hat x+a\hat y)]}^{\hat z}}{4\pi(a^2+(x')^2)^{3/2}} + \int_{0}^{\infty}\frac{\mu_0 I\, dx'\,\overbrace{\hat x\times[\bar 0-(x'\hat x-a\hat y)]}^{\hat z}}{4\pi(a^2+(x')^2)^{3/2}} +$$

$$+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\mu_0 I a\,\overbrace{\hat\phi\times(\bar 0-a\hat R)}^{-\hat z}}{4\pi a^3}d\phi = 2\int_0^\infty \frac{\mu_0 I a\, dx'}{4\pi(a^2+(x')^2)^{3/2}}\hat z + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}d\phi\,\hat z =$$

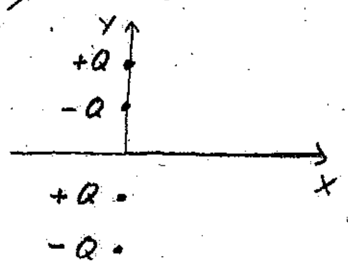
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{a x'}{a^2\sqrt{a^2+(x')^2}}\right]_0^\infty \hat z + \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\Big[\phi\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2}\hat z = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}+\frac{\mu_0 I}{4a}\right)\hat z$$

Svar: a) $\bar A(\bar 0) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\hat y$, $\bar B(\bar 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(2+\pi)\hat z$

---

2) a) Då marken är en god ledare har den samma potential över hela ytan ända ut till oändligheten $\Rightarrow V(x) = 0$.

b) Spegelladdningsmetoden $\Rightarrow$



$$\bar E(\bar r) = \sum_{i=1}^{4}\frac{Q_i(\bar r-\bar r_i)}{4\pi\varepsilon_0|\bar r-\bar r_i|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{+Q(\cancel{x\hat x}-h_2\hat y)}{(x^2+h_2^2)^{3/2}} + \frac{-Q(\cancel{x\hat x}+h_2\hat y)}{(x^2+h_2^2)^{3/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{-Q(\cancel{x\hat x}-h_1\hat y)}{(x^2+h_1^2)^{3/2}} + \frac{+Q(\cancel{x\hat x}-h_1\hat y)}{(x^2+h_1^2)^{3/2}}\right\} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-h_2}{(x^2+h_2^2)^{3/2}} + \frac{h_1}{(x^2+h_1^2)^{3/2}}\right\}\hat y$$

c) $\oint_S \bar D\cdot d\bar S = Q_{\text{innes. fri}}$ ger med en liten burk i markytan att $\varrho_s = \bar D\cdot\hat n$, $\bar D = \varepsilon_0\bar E \Rightarrow \varrho_s = \varepsilon_0\bar E\cdot\hat y = \frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{-h_2}{(x^2+h_2^2)^{3/2}} + \frac{h_1}{(x^2+h_1^2)^{3/2}}\right\}$

Svar: a) $V(x) = 0$; b) $\bar E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-h_2}{(x^2+h_2^2)^{3/2}} + \frac{h_1}{(x^2+h_1^2)^{3/2}}\right\}\hat y \approx 61{,}2\,\hat y\ \left[\frac{V}{m}\right]$

c) $\varrho_s(x) = \frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{-h_2}{(x^2+h_2^2)^{3/2}} + \frac{h_1}{(x^2+h_1^2)^{3/2}}\right\} \approx 5{,}4\cdot 10^{-9}\ C/m^2$

Ansätt ström I från inre sfären mot yttre.

Symmetri $\Rightarrow \bar{J} = J(r)\hat{r}$, $I = \oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S} = J(r)\cdot 4\pi r^2$ mellan skalen

$$\Rightarrow \bar{J} = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{r} \quad (1) \Rightarrow \bar{E} = \bar{J}/\sigma = \frac{I\, r}{4\pi\sigma_0 r^2}\hat{r} = \frac{I}{4\pi\sigma_0 r}\hat{r}$$

2003-06-02

$$U = \int_{Ref}^{Akt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_b^a \frac{-I}{4\pi\sigma_0 r}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \frac{I}{4\pi\sigma_0}\ln(b/a)$$ ger i (1) att

$$\bar{J} = \frac{\sigma_0 U}{r^2 \ln(b/a)}\hat{r}$$ störst när $r = a \Rightarrow J_{max} = \dfrac{\sigma_0 U}{a^2\ln(b/a)}$ som

blir så låg som möjligt när $f(a) = a^2\ln(b/a)$ har max.

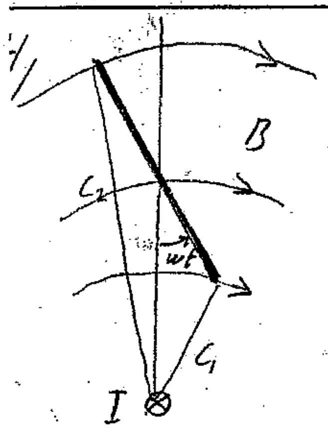
$$\frac{df}{da} = 2a\ln(b/a) - a^2/a = a\left[2\ln(b/a) - 1\right] = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{e} \Rightarrow a = b/\sqrt{e}$$

$$\frac{d^2f}{da^2} = 2\ln(b/a) - 1 - 2a/a = 2\ln(b/a) - 3 = \{a = b/\sqrt{e}\} = -2 < 0 \Rightarrow \max$$

Svar: Maximala strömstyrkan blir minst om $a = b/\sqrt{e}$

---

4)



$\bar{B}$-fältet från lång rak ledare fås m.h.a.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cirkulationssatsen} \\ \text{symmetri m.m.} \Rightarrow \bar{B} = B(R)\hat{\phi}\end{array}\right\} \Rightarrow \oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{oms.} \Rightarrow$$

$$2\pi R\, B(R) = \mu_0 I \Rightarrow \bar{B}(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi}$$

Ur figur och m.h.a. $\oint_S \bar{B}\cdot d\bar{S} = 0$ ser vi att

$$\Phi = \int_0^{2a}\int_{c_1}^{c_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\,dR\,dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot 2a\cdot\ln\frac{c_2}{c_1} =$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{\pi}\ln\frac{\sqrt{b^2+a^2+2ab\cos\omega t}}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\omega t}}$$

$$\varepsilon_{emk} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-\mu_0 I a^2 b\omega}{\pi}\left(\frac{-\sin\omega t}{b^2+a^2+2ab\cos\omega t} - \frac{+\sin\omega t}{b^2+a^2-2ab\cos\omega t}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2 b\omega\sin\omega t}{\pi}\left(\frac{1}{b^2+a^2+2ab\cos\omega t} + \frac{1}{b^2+a^2-2ab\cos\omega t}\right)$$

Svar: Inducerad elektromotorisk kraft:

$$\varepsilon_{emk} = \frac{\mu_0 a^2 b I\omega\sin\omega t}{\pi}\left(\frac{1}{b^2+a^2+2ab\cos\omega t} + \frac{1}{b^2+a^2-2ab\cos\omega t}\right)$$

1

$\bar\nabla\cdot\bar D = \rho$, $\bar D = \varepsilon_0\varepsilon_r\bar E$, $\bar E = -\bar\nabla V \Rightarrow \bar\nabla\cdot(\varepsilon_0\varepsilon_r\bar\nabla V) = -\rho$

2003-06-02

Mellan planen är $\rho = 0$ och $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow \bar\nabla^2 V = 0$

Enligt uppgift är $V(R,\phi,z) = V(\phi) \Rightarrow \bar\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial\phi} = C_1 \Rightarrow V(\phi) = C_1\phi + C_2$

Ansätt potentialen $V=0$ på planet vid $\phi = 0$ och $V = U$ på planet vid $\phi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow C_2 = 0$, $U = C_1\frac{\pi}{3} \Rightarrow C_1 = \frac{3U}{\pi}$

$\bar E = -\bar\nabla V = -\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat\phi = -\frac{1}{R}\cdot\frac{3U}{\pi}\hat\phi \Rightarrow \bar D = \varepsilon_0\bar E = -\frac{3\varepsilon_0 U}{\pi R}\hat\phi$

$\left.\begin{array}{l}\oint\bar D\cdot d\bar S = Q_{fri,innes} \\ \text{Lite burk vid metallyta}\end{array}\right\} \Rightarrow \rho_s = \bar D\cdot\hat n \Rightarrow \rho_s = \frac{+3\varepsilon_0 U}{\pi R}$ på ytan med

$\hat n = -\hat\phi$ på planet vid $\phi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ total laddning på den sidan av det planet $Q_1 = \int_0^h\int_a^b -\frac{3\varepsilon_0 U}{\pi R}\cdot dR\,dz =$

$= -\frac{3\varepsilon_0 U}{\pi} h \ln(b/a)$

Av symmetriskäl blir laddningen densamma på båda sidorna av planen och lika på alla plan med potential $U \Rightarrow$ total laddning på belägg med potential U blir

$Q = 6Q_1 = \frac{18\varepsilon_0 U}{\pi} h\ln(b/a) \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{18\varepsilon_0 h}{\pi}\ln(b/a)$

Svar: Kapacitansen är $C = \frac{18\varepsilon_0 h}{\pi}\ln(b/a)$