2003 -01- 15

10

Tekniska högskolan i Linköping
Institutionen för Fysik och Mätteknik
Peter Münger
Ankn. 1893

Tentamen i **TFYY53 och TFFY39 Elektromagnetism Y**, onsdag 15 januari 2003 kl 8.00 – 13.00.

Kursens mål: Att ge de kunskaper i elektromagnetismens grunder som krävs för studier i fysik och tillämpade elektrotekniska ämnen, samt att ge färdigheter i att lösa problem av grundläggande slag.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman
Räknedosa (tömd på program och annan information)
Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan)
Tefyma-tabell; Ingelstam, Rönngren, Sjöberg
Matematiska tabeller, tex Beta, är tillåtna men behövs ej

OBS Allvarligt fel i 1996 års upplaga av Physics Handbook på sidan 170:

Ska stå: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,dv$ **Står:** $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r^2}\,dv$

Frågor besvaras av Peter Münger som dyker upp minst två gånger under skrivningstiden. Lösningar sätts upp på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset efter skrivningens slut. Skrivningsresultat anslås utanför kursexpeditionen i fysikhuset senast 10 arbetsdagar efter tentamenstillfället. Skrivningen omfattar 5 problem som vardera kan ge 4 poäng; maximalt kan man alltså få 20 poäng och betygsskalan är:

Nya kursen TFYY53				Gamla kursen TFFY39			
Betyg	3	8–11	poäng	Betyg	3	9–12	poäng
"	4	12–15	"	"	4	13–16	"
"	5	16–20	"	"	5	17–20	"

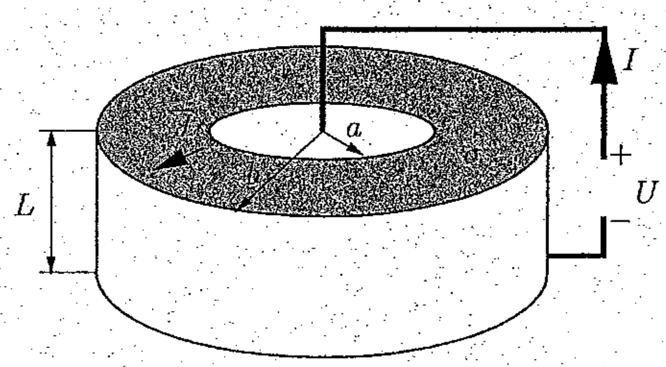
Lösningar skall om möjligt åtföljas av figur, införda beteckningar skall definieras, ekvationer motiveras och numeriskt svar alltid skrivas ut med enhet. Orimligt svar medför noll poäng på uppgiften. Problemen är inte nödvändigtvis ordnade i svårighetsgrad.

Lycka till!

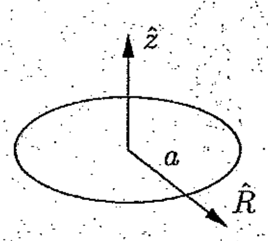
1. Mellan två cylindriska koaxiella elektroder, vilkas radier är a och $b > a$ och vilka hålles vid en potentialskillnad U hälles en vätska med en elektrisk ledningsförmåga σ. Ytterelektrodens radie b förutsätts ha ett bestämt värde.

   (a) Hur stor skall innerelektrodens radie a väljas, för att beloppet av strömtätheten $\overline{J}$ vid dess yta skall bli så liten som möjligt. (3p)

   (b) Beräkna denna minimala strömtäthet. (1p)



2. En mycket tunn cirkulär metallskiva med radien a har fått en viss total laddning. Eftersom metallen är ledande fördelar sig laddningen i form av en ytladdningstäthet ρ_s som av symmetriskäl är lika på cirkelskivans över $\rho_{sö}$ och undersida ρ_{su}. Hur denna ytladdningstäthet ρ_s ser ut som funktion av avståndet R till cirkelskivans mitt är ganska svårt att beräkna men slututtrycket är enkelt, $\rho_s(R) = \rho_{sö}(R) = \rho_{su}(R) = \alpha/\sqrt{a^2 - R^2}$ där α är en konstant.



   (a) Bestäm konstanten α om metallskivans potential är V_0 relativt en mycket avlägsen punkt. (2p)

   (b) Beräkna elektriska fältstyrkan $\overline{E}(R)$ omedelbart ovanför metallskivan för $0 \leq R < a$. (Det är tillåtet att svara uttryckt i α eller V_0, dvs du kan göra denna deluppgift utan att ha gjort (a) uppgiften.) (2p)

3. Axeln till en lång cylindrisk ledare med radien R_1 sammanfaller med $\hat{z}$-axeln i ett kartesiskt koordinatsystem. I ledaren finns det ett längsgående cylindriskt hål med radie $R_2 < R_1$ vars axel är parallell med $\hat{z}$-axeln och går genom punkten $(0, b, 0)$ där $0 < b < R_1 - R_2$. En ström I flyter längs ledaren. Strömtätheten är homogen i ledaren. Visa att den magnetiska flödestätheten är homogen i det cylindriska hålet och beräkna dess värde och riktning. (4p)

4. Laserstrålar med en intensitet av 100 W/m^2 kan numera åstadkommas. Antag att en sådan stråle kan beskrivas som en plan linjärpolariserad elektromagnetisk våg där fälten har utseendet:

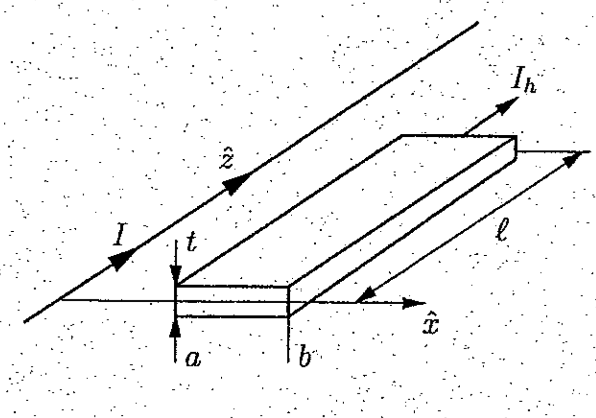
$$\overline{E} = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t)\hat{y} \quad \text{respektive} \quad \overline{B} = B_0 \cdot \sin(kx - \omega t)\hat{z}$$

(a) Härled ett samband mellan amplituderna E_0 och B_0 genom att utgå från ett lämpligt Maxwell-samband. (1p)

(b) Beräkna ett numeriskt värde på E_0 med hjälp av den angivna intensiteten som är ett tidsmedelvärde under en period. (1p)

(c) Denna deluppgift har inget med ovanstående plana våg att göra. Den handlar i stället om ett gränsskikt mellan två medier. Gränsytan sammanfaller med yz-planet dvs $\hat{x}$ är gränsskiktets normalriktning. Båda medierna är linjära och karakteriseras av ledningsförmåga σ_1 respektive σ_2 samt ε_{r1} respektive ε_{r2}. Mediet med index 1 fyller området $x < 0$ och mediet med index 2 fyller området $x > 0$. Det flyter en strömtäthet genom gränsskiktet. För $x = 0^-$ gäller $\overline{J}_- = \alpha\hat{x} + \beta\hat{y}$. Beräkna motsvarande strömtäthet för $x = 0^+$ dvs $\overline{J}_+$. Vi förutsätter stationärt tillstånd. (2p)

5. En metod för att mäta strömmen i en ledare, utan att klippa upp eller vidröra ledaren, är att mäta det magnetiska fältet runt ledaren och från det räkna ut strömmen i ledaren. Om man vill kunna mäta både likström och växelström behöver man en metod att mäta såväl statiska som tidsvarierande magnetiska fält. En sådan metod är att använda Halleffekten. Antag att man har en mycket lång rät ledare längs z-axeln som för likströmmen I i positiv $\hat{z}$-riktning. För att mäta strömmen I lägger man ett mycket tunt Hallelement av tjocklek t i zx-planet med en långsida på avståndet a från centrum av ledaren och dess andra långsida på avståndet $b > a \gg t$ från ledarens centrum. Elementets längd är ℓ. Antag att vi skickar en total ström I_h ($|I_h| \ll |I|$) i positiv $\hat{z}$-riktning jämnt fördelad i Hallelementet. I det omagnetiska Hallelementet finns det n laddningsbärare per volymselement var och en med laddningen q. Beräkna Hallspänningen som uppkommer mellan Hallelementets långsidor. Använd långsidan närmast ledaren som referens för spänningen. (4p)



Tentamen i Elektromagnetism Y, TFYY53 o TFFY39 15/1 - 03

1, Ansätt strömmen I från inre cyl. till yttre. } ⇒
Symmetri ⇒ $\bar{J} = J(R)\hat{R}$ }

$$I = \int_0^L\int_0^{2\pi} J(R)\hat{R}\cdot\hat{R}\,R\,d\phi\,dz = J(R)2\pi RL \Rightarrow J(R) = \frac{I}{2\pi LR} \Rightarrow$$

$$U = \int_{Ret}^{Akt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \left\{\bar{J} = \sigma\bar{E}\right\} = \int_b^a -\frac{I}{2\pi\sigma LR}\hat{R}\cdot\hat{R}\,dR = \frac{I}{2\pi\sigma L}\ln b/a \Rightarrow$$

$J(R) = \dfrac{\sigma U}{R\ln b/a}$ Vi ser att J är störst för små R dvs $R = a$

$\Rightarrow J_{max} = J(a) = \dfrac{\sigma U}{a\ln b/a}$ denna strömstyrka blir

minimal när $f(a) = a\ln(b/a) = a[\ln b - \ln a]$ har max.

$$\frac{df(a)}{da} = \ln b - \ln a - 1 = 0 \Rightarrow \ln b/a = 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = e \Rightarrow a = b/e$$

$$\frac{d^2f(a)}{da^2} = -\frac{1}{a} < 0 \Rightarrow \text{max.}$$

b, $J_{max} = \dfrac{\sigma U}{\frac{b}{e}\cdot 1} = \dfrac{\sigma U}{b}e$

Svar: a, Välj $a = b/e$

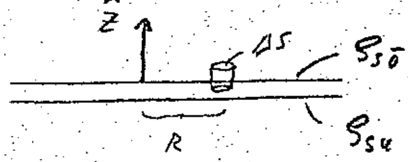
b, Minsta möjliga strömtätheten vid inre cylindern är $\dfrac{\sigma e}{b}U$

1, a, Potentialen är densamma på hela skivan ty den är av metall. Beräkna den i centrum.

$$V(\bar r) = \int_{\circledast} \frac{dQ'}{4\pi\varepsilon_0|\bar r - \bar r'|} = 2\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{\alpha \; R\, d\phi\, dR}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2-R^2}\, R} = \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\phi\Big]_0^{2\pi}\Big[\arcsin\frac{R}{a}\Big]_0^a =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha\pi}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \alpha = \frac{2\varepsilon_0}{\pi}V_0$$

b, Lägg in en liten Gauss burk på godtycklig radie



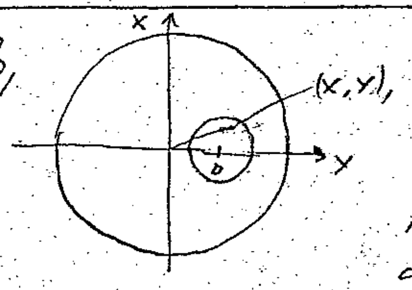
$$\oint \bar D\cdot d\bar S = Q_{fri,innes.} \Rightarrow D(R)\Delta S + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{mantel}}}{0} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{botten i metall}}}{0} = \varrho_{sö}\,\Delta S$$

Fältet $/\!/ \hat n$ vid metallyta $\nearrow \bar D_\perp \hat n$

$$\Rightarrow D(R) = \varrho_{sö} \Rightarrow \bar E = \frac{\bar D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\bar D}{\varepsilon_0} = \frac{\varrho_{sö}}{\varepsilon_0}\hat z = \frac{\alpha}{\varepsilon_0\sqrt{a^2-R^2}}\hat z$$

<u>Svar a, $\alpha = 2\varepsilon_0 V_0/\pi$; b, $\bar E(R) = \dfrac{2V_0}{\pi\sqrt{a^2-R^2}}\hat z$</u>

2,



Använd superposition! En ledare utan hål med radie R_1 längs z-axeln med $\bar J_1 = J\hat z$ och en ledare med radie R_2 och strömtäthet $\bar J_2 = -J\hat z$.

För var och en har vi cyl. sym. så vi kan använda cirkulations satsen: $\oint_C \bar H\cdot d\bar l = I_{oms,fri}$

För en godtycklig punkt i hålet (x,y,z) får vi:

$$2\pi\sqrt{x^2+y^2}\,H_1(x,y) = \pi(x^2+y^2)J \Rightarrow H_1 = \sqrt{x^2+y^2}\,J/2$$

Ur figur: $\bar H_1 = H_1\cdot\left(-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat y\right) = (-y\hat x + x\hat y)J/2$

P.s.s. för ledaren med radie R_2: $\bar H_2 = -\dfrac{J}{2}\left(-(y-b)\hat x + x\hat y\right)$

D.v.s. totalt $\bar H = \bar H_1 + \bar H_2 = \dfrac{J}{2}\left[-\cancel{y}\hat x + \cancel{x\hat y} + (\cancel{y}-b)\hat x - \cancel{x\hat y}\right] = -b\dfrac{J}{2}\hat x$

$$J = \frac{I}{\pi R_1^2 - \pi R_2^2} = \frac{I}{\pi(R_1^2-R_2^2)} \Rightarrow \bar B = \frac{-\mu_0 b I}{2\pi(R_1^2-R_2^2)}\hat x \quad \text{ober. av } x \text{ o } y$$

<u>Svar: $\bar B = \dfrac{-\mu_0 b I}{2\pi(R_1^2-R_2^2)}\hat x$ i hålet</u>

a) $\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{z} \Rightarrow kE_0\cos(kx-\omega t) = \omega B_0\cos(kx-\omega t)$

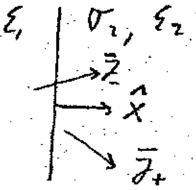
$\Rightarrow kE_0 = \omega B_0 \Rightarrow B_0 = \frac{k}{\omega}E_0 = E_0/c$ där $c = \frac{\omega}{k}$ = ljushastigheten

b) Poyntingvektor $\bar{P} = \bar{E}\times\bar{H} = \bar{E}\times\bar{B}/\mu_0 = E_0\frac{B_0}{\mu_0}\sin^2(kx-\omega t)\hat{x}$

$\Rightarrow \bar{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin^2(kx-\omega t)\hat{x}$

Tidsmedelvärde: $\langle\bar{P}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin^2(kx-\omega t)\hat{x}\,dt = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\hat{x}$

$\Rightarrow E_0 = \sqrt{2\mu_0 c P_0} \approx \sqrt{2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 3\cdot 10^{8}\cdot 100} \approx 275$ V/m

c) 

$\bar{J}_- = \alpha\hat{x} + \beta\hat{y}$ Antag $\bar{J}_+ = \alpha'\hat{x} + \beta'\hat{y} + \gamma'\hat{z}$

$\left.\begin{array}{l}\text{Stationärt tillstånd} \Rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0 \\ \text{Liten tunn burk vid gränsskiktet}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$

$\left.\begin{array}{l}\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = \bar{0} \Rightarrow \oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0\ \forall C \\ \text{Liten tunn slinga vid gränsytan}\end{array}\right\} \Rightarrow$ tangentiell komp av $\bar{E}$ är kontinuerlig

men $\bar{E}_- = \bar{J}_-/\sigma_1$, $\bar{E}_+ = \bar{J}_+/\sigma_2 \Rightarrow \frac{\beta}{\sigma_1} = \frac{\beta'}{\sigma_2}$; $\frac{0}{\sigma_1} = \frac{\gamma'}{\sigma_2} \Rightarrow \beta' = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\beta,\ \gamma' = 0$

$\therefore\ \bar{J}_+ = \alpha\hat{x} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\beta\hat{y}$

Svar: a) $B_0 = \frac{k}{\omega}E_0 = E_0/c$; b) $E_0 = \sqrt{2\mu_0 c P_0} \approx 275$ V/m

c) $\bar{J}_+ = \alpha\hat{x} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\beta\hat{y}$

Magnetiska fältet runt ledaren fås med hjälp av cirkulations satsen och symmetri m.m. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}\oint \bar{H}\cdot d\bar{l} &= I_{oms.\,fri} \\ \bar{H} &= H(R)\hat{\phi}\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\pi R H = I \Rightarrow \bar{H} = \frac{I}{2\pi R}\hat{\phi} \Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi}$$

D.v.s. i Hallelementet: $\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi X}\hat{y}$

I Hallelementet är strömtätheten: $\bar{J} = \frac{I_h}{t(b-a)}\hat{z} = nq\bar{v}$

Kraft balans på laddnings bärarna i Hallelementet $\Rightarrow$

$$\bar{0} = \bar{F}_m + \bar{F}_e = q\bar{v}\times\bar{B} + q\bar{E}_h \Rightarrow \bar{E}_h = -\bar{v}\times\bar{B} = \frac{-I_h}{nqt(b-a)}\hat{z}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi X}\hat{y} \Rightarrow$$

$$\bar{E}_h = \frac{\mu_0 I_h I}{nqt(b-a)2\pi X}\hat{x} \Rightarrow V_h = \int -\bar{E}_h\cdot d\bar{l} = \int_a^b \frac{-\mu_0 I_h I}{nqt(b-a)2\pi X}\hat{x}\cdot\hat{x}\,dx \Rightarrow$$

$$V_h = \frac{-\mu_0 I_h I}{nqt(b-a)2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Svar: Hallspänningen blir $V_h = \frac{-\mu_0 I_h I}{2\pi nqt(b-a)}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Kommentar: För att få en praktiskt användbar metod måste man minska reluktansen i den magnetiska kretsen genom att använda ett material med högt μ_r. Vidare behöver man ett Hallelement av ett material som ger en kraftig Halleffekt.