2002 -08- 27

7.

Tekniska högskolan i Linköping
Institutionen för Fysik och Mätteknik
Peter Münger
Ankn. 1893

Tentamen i TFYY53 och **TFFY39 Elektromagnetism Y**, tisdag 27 augusti 2002 kl 8.00 – 13.00.

Kursens mål: Att ge de kunskaper i elektromagnetismens grunder som krävs för studier i fysik och tillämpade elektrotekniska ämnen, samt att ge färdigheter i att lösa problem av grundläggande slag.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook; Carl Nordling, Jonny Österman
Räknedosa (tömd på program och annan information)
Formelblad (utgörs av de sista bladen på tentan)
Tefyma-tabell; Ingelstam, Rönngren, Sjöberg
Matematiska tabeller, tex Beta, är tillåtna men behövs ej

OBS Allvarligt fel i 1996 års upplaga av Physics Handbook på sidan 170:

Ska stå: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,dv$ **Står:** $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r^2}\,dv$

Frågor besvaras av Peter Münger som dyker upp minst två gånger under skrivningstiden. Lösningar sätts upp på anslagstavlan utanför kursexpeditionen i fysikhuset efter skrivningens slut. Skrivningsresultat anslås utanför kursexpeditionen i fysikhuset senast 10 arbetsdagar efter tentamenstillfället. Skrivningen omfattar 5 problem som vardera kan ge 4 poäng; maximalt kan man alltså få 20 poäng och betygsskalan är:

Nya kursen TFYY53

Betyg	3	8 – 11	poäng
"	4	12 – 15	"
"	5	16 – 20	"

Gamla kursen TFFY39

Betyg	3	9 – 12	poäng
"	4	13 – 16	"
"	5	17 – 20	"

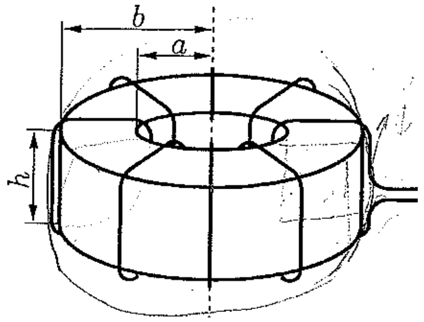
Lösningar skall om möjligt åtföljas av figur, införda beteckningar skall definieras, ekvationer motiveras och numeriskt svar alltid skrivas ut med enhet. Orimligt svar medför noll poäng på uppgiften. Problemen är inte nödvändigtvis ordnade i svårighetsgrad.

Lycka till!

2002-08-27

1. En mycket lång tunn rät ledare har belagts med en linjeladdningstäthet ρ_ℓ. Ledaren för även en ström I. En positiv punktladdning Q rör sig med hastigheten v parallellt med ledaren på ett avstånd d. Bestäm hastigheten v så att den totala påverkan på laddningen från ledaren blir noll. Det är upp till dig att anta korrekt tecken på linjeladdningstätheten och riktning på strömmen så att *en* lösning existerar. För full poäng krävs att tecken och riktning tydligt framgår ur lösningen. (4p)

2. En toroid, se nedan, med rektangulärt tvärsnitt har en innerradie a, ytterradie $b > a$ och axiell längd h. Toroiden, vars magnetiska egenskaper beskrivs av en konstant relativ permeabilitet μ_r är jämt lindad med N varv av en isolerad ledningstråd. Beräkna toroidens induktans. Läckning kan försummas men antaganden som bygger på att $b - a \ll a$ leder till poängavdrag. (4p)



3. Magnetiska vektorpotentialen för ett visst fysikaliskt system ges i cylindriska koordinater av:

$$\overline{A} = -\left[\alpha_1\mu_0\left(\frac{R}{a}\right)^2 + C_1\right]\hat{z}\,; \qquad R < a$$

$$\overline{A} = -\left[\alpha_2\mu_0\left(1 + 2\ln\frac{R}{a}\right) + C_2\right]\hat{z}\,; \quad R > a.$$

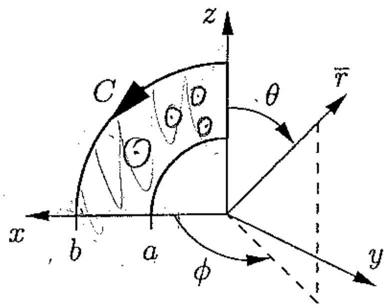
A_z

Storheterna α_1, α_2, C_1, C_2, a och permeabiliteten för vakuum μ_0 är konstanter. Beskriv den bakomliggande fysikaliska situationen genom att beräkna de totala strömmar, ytströmtätheter och strömtätheter som orsakat vektorpotentialen. Riktning, position och storlek skall framgå tydligt i svaret uttryckt i de givna storheterna. (Notera att alla typer av ström inte behöver förekomma.) (4p)

4. Vi studerar strålningen från en oscillerande elektrisk dipol i vakuum. På stort avstånd r från centrum av dipolen ges det magnetiska fältet i sfäriska koordinater av:

$$\overline{B} = \frac{\alpha}{r}\frac{k}{\omega}\sin(\theta)\cos(\omega t - kr)\hat{\phi},$$

där α är en konstant med enheten [V]. Att $\omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ får användas utan bevis.



(a) Härled det tillhörande elektriska fältet $\overline{E}$ på stort avstånd. Eventuella högre ordningens termer i $1/r$ kan försummas — vi är bara intresserade av första ordningens bidrag. Tidsoberoende termer kan sättas till noll utan motivering. (2p)

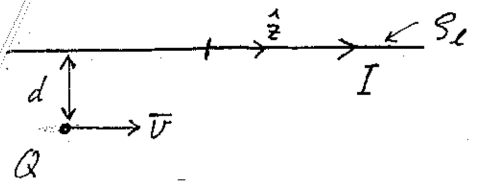
(b) Beräkna den inducerade elektromotoriska kraften ε_{emk} i den slutna slingan C. Slingan C ligger i planet $\phi = 0$ och består av två cirkelsegment med radie a respektive $b > a$ med $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Cirkelsegmenten är sammanbundna med hjälp av två radiellt riktade raka segment, ett vid $\theta = 0$ och ett vid $\theta = \pi/2$. Positiv omloppsriktningen för slingan C ges av ytnormalen $\hat{\phi}$ till ytan med C som rand. (2p)

5. Ett medium vars elektriska egenskaper karaktäriseras av den relativa dielektricitetskonstanten ε_r och ledningsförmågan σ fyller området mellan två koncentriska tunna sfäriska metallskal med radierna a respektive b ($a < b$). Vid tiden $t = 0$ tillförs plötsligt det inre metallskalet en elektrisk laddning q.

(a) Beräkna strömmen $I(t)$ genom mediet som funktion av tiden t. (2p)

(b) Beräkna den totala energi (Joule-värme) som utvecklas i mediet på grund av strömmen $I(t)$, för $0 < t < \infty$, och visa explicit att denna precis motsvarar ändringen i mediets elektrostatiska energi, vilken förekommer som en konsekvens av omfördelningen av laddningen q. (2p) ämen i Elektromagnetism Y, TFYY53 o TFFY39 27/8-02

2002-08-27



Magnetfältet orsakat av strömmen fås mha cirkulationssatsen och symmetri:

$$\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{\ell} = I_{fri.oms}\ ,\quad \bar{H} = H(R)\hat{\phi} \Rightarrow 2\pi R\, H(R) = I \Rightarrow$$

$$\bar{H} = \frac{I}{2\pi R}\hat{\phi} \Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi}$$

Elektriska fältet orsakat av ϱ_ℓ fås mha Gauss sats och symmetri: $\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q_{fri.innes.}$, $\bar{D} = D(R)\hat{R}$, på L lång cylinder $\Rightarrow$

$$2\pi R L\, D(R) + \underset{lock}{0} + \underset{botten}{0} = \varrho_\ell L \Rightarrow \bar{D} = \frac{\varrho_\ell}{2\pi R}\hat{R} \Rightarrow \bar{E} = \frac{\varrho_\ell}{2\pi \varepsilon_0 R}\hat{R}$$

Med $R = d$ blir den totala kraften på Q:

$$\bar{F}_Q = Q\bar{E} + Q\bar{v}\times\bar{B} = \frac{Q\varrho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 d}\hat{R} + Qv\underbrace{\hat{z}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{\phi}}_{-\hat{R}} = \bar{0} \text{ villkor} \Rightarrow$$

$$v = \frac{\varrho_\ell}{\varepsilon_0\mu_0 I}$$

Svar: Om $\varrho_\ell > 0$ och $I > 0$ ska hastigheten vara $v = \frac{\varrho_\ell}{\varepsilon_0\mu_0 I}$ i samma riktning som strömmen I

---

2. Ansätt en ström I i spolen. Magnetfältet i toroiden fås mha cirkulationssatsen och symmetri: $\bar{H} = H(R)\hat{\phi}$; $\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{\ell} = I_{fri.oms} \Rightarrow$

$$2\pi R\, H(R) = NI \Rightarrow \bar{H} = \frac{NI}{2\pi R}\hat{\phi} \Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi R}\hat{\phi}$$

Magnetiska flödet blir: $\Phi_{tot} = N\int \bar{B}\cdot d\bar{S} = N\int_a^b\int_0^h \frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi R}\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\, dz\, dR =$

$$= \frac{\mu_0\mu_r N^2 I h}{2\pi}\ln(b/a) \Rightarrow L \equiv \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0\mu_r h N^2}{2\pi}\ln(b/a)$$

Svar: Toroidens induktans är $L = \frac{\mu_0\mu_r h N^2}{2\pi}\ln(b/a)$

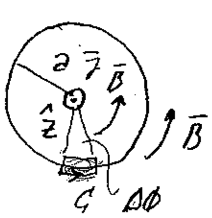
$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial R}\hat{\phi} \Rightarrow \bar{B} = \begin{cases} 2\alpha_1\mu_0 R/a^2\ \hat{\phi} & R<a \\ 2\alpha_2\mu_0/R\ \hat{\phi} & a<R \end{cases}$$

2002 -08- 27

$$\bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\ ;\ \bar{B} = \mu_0\bar{H},\ \text{tids ober.} \Rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\bar{J} \Rightarrow$$

$$\bar{J} = \bar{\nabla}\times\bar{B}/\mu_0 = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{B_\phi}{\mu_0}\right)\hat{z} = \begin{cases} 4\alpha_1/a^2\ \hat{z} & R<a \\ \bar{0} & a<R \end{cases}$$

Vi måste även undersöka eventuella ytströmtätheter på ytor där $\bar{B}$ är diskontinuerlig. I vårt fall vid $R=a$ om $\alpha_1 \neq \alpha_2$.



$\Delta R \to 0,\ B_R = 0$

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{oms.} \Rightarrow B(a_+)a\Delta\phi + 0 - B(a_-)a\Delta\phi + 0 =$$

$$= \mu_0 J_{sm}\, a\Delta\phi \Rightarrow \bar{J}_{sm} = B(a_+) - B(a_-) = 2(\alpha_2-\alpha_1)/a\ \hat{z}$$

i $\hat{z}$-riktning på ytan $R=a$

Vi måste slutligen undersöka eventuella strömmar längs linjer där $\bar{B}$ divergerar. I vårt fall är $\bar{B}$ ändlig för alla $R \Rightarrow$ inga (linje)-strömmar.

Svar: <u>Vi har en lång rät stång med radie a som för strömtätheten $\bar{J} = \frac{4\alpha_1}{a^2}\hat{z}$ i $0<R<a$ och ytströmtätheter $\bar{J}_{sm} = \frac{2(\alpha_2-\alpha_1)}{a}\hat{z}$ på $R=a$.</u>

$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, $\bar{J} = \bar{0}$ e $\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$ $\Rightarrow$ $\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ $\Rightarrow$

2002-08-27

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta B_\phi)\right]\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi)\hat{\theta} = \underbrace{\frac{2\alpha h}{r^2}\cos\theta\cos(wt-hr)\hat{r}}_{\approx \bar{0} \text{ ty } 1/r^2} -$$

$$-\frac{\alpha h^2}{rw}\sin\theta\sin(wt-hr)\hat{\theta} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\bar{E} = \frac{\alpha h^2}{\mu_0 \varepsilon_0 w^2 r}\sin\theta\cos(wt-hr)\hat{\theta} + \underbrace{\bar{C}}_{\text{tids ober. konst.} = \bar{0}} =$$

$$= \frac{\alpha}{r}\sin\theta\cos(wt-hr)\hat{\theta}$$

b) $\varepsilon_{emk} = -\frac{d\Phi}{dt}$, $\Phi = \int \bar{B}\cdot d\bar{S} = \int_a^b\int_0^{\pi/2} \frac{\alpha h}{rw}\sin\theta\cos(wt-hr)\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\, r\,d\theta\,dr$

$$= \frac{\alpha h}{w}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{\sin(wt-hr)}{-h}\right]_a^b = \frac{\alpha}{w}\left[\sin(wt-ha) - \sin(wt-hb)\right]$$

$$\varepsilon_{emk} = -\frac{d\Phi}{dt} = \alpha\left[\cos(wt-hb) - \cos(wt-ha)\right]$$

Svar: a) $\bar{E} = \frac{\alpha}{r}\sin(\theta)\cos(wt-hr)\hat{\theta}$

b) $\varepsilon_{emk} = \alpha\left[\cos(wt-hb) - \cos(wt-ha)\right]$

---

5. Homogent material, σ/ε_r = konstant $\Rightarrow$ inga fria laddningar samlas i materialet.

Sfärisk symmetri $\Rightarrow$ $\bar{J} = J(r)\hat{r}$ $\Rightarrow$ $I(t) = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{S} = J(r)4\pi r^2$, $a<r<b$

$$\Rightarrow \bar{J} = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{r} \Rightarrow \bar{E} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\hat{r} \Rightarrow \bar{D} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r I}{4\pi\sigma r^2}\hat{r}$$

Gauss sats $\oint \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q_{fri,innes}$ precis utanför inre skalet $\Rightarrow$

$$q(t) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r I(t)}{4\pi\sigma a^2}\cdot 4\pi a^2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\sigma}I(t) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\sigma}\left(-\frac{dq}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{q}\frac{dq}{dt} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow \frac{d\ln q}{dt} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow \ln q = -\frac{\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon_r} + C_1 \Rightarrow$$

$$q(t) = C_2 e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} \quad \text{men } q(0) = q_0 \Rightarrow q(t) = q_0 e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{\sigma q_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

2002 -08- 27

b) $$\bar{E} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\hat{r} \Rightarrow U(t) = \int_{Ref}^{Alt} -\bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_b^a \frac{-I}{4\pi\sigma r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \frac{I(t)}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{4\pi\sigma ab} I(t) \Rightarrow P(t) = U(t)I(t) = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}\left(\frac{\sigma q_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2 e^{-\frac{2\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_1 = \int_0^\infty P(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}\left(\frac{\sigma q_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2 e^{-\frac{2\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}\,dt = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}\left(\frac{\sigma q_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)\frac{q_0}{2}\left[-e^{-\frac{2\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{b-a}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab} q_0^2$$

$$W_2 \underset{\substack{\uparrow \\ t=0}}{=} \underbrace{\int}_{\text{Hela } R^3} \frac{1}{2}\bar{E}\cdot\bar{D}\,d\tau - 0 = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\,d\tau + \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{E}=\bar{0} \\ \text{utanför}}}{0} =$$

Med och utan q_0 — Mellan skärarna

$$= \int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{I(0)}{4\pi\sigma r^2}\right)^2 r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dr = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{I(0)}{4\pi\sigma}\right)^2 4\pi\frac{b-a}{ab} =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{\sigma q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\sigma}\right)^2 4\pi\frac{b-a}{ab} = \frac{b-a}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab} q_0^2 = W_1$$

Svar: a) $I(t) = \frac{\sigma q_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} e^{-\sigma t/\varepsilon_0\varepsilon_r}$, $0 < t$

b) Totala energin som utvecklas i mediet är $\frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot\frac{b-a}{ab}\cdot q_0^2$