

Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings universitet



Datum för tentamen	2019-10-30
Sal (1)	G34(4)
Tid	8-12
Utb. kod	TDP015
Modul	TEN1
Utb. kodnamn/benämning Modulnamn/benämning	Grunder i matematik och logik Skriftlig tentamen
Institution	IDA
Antal uppgifter som ingår i tentamen	8
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Marco Kuhlmann
Telefon under skrivtiden	013-284644
Besöker salen ca klockan	endast telefonjour
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	Veronica Kindeland Gunnarsson, 013-285634, veronica.kindeland.gunnarsson@liu.se
Tillåtna hjälpmedel	inga
Övrigt	-/-
Antal exemplar i påsen	

Tentamen 2019-10-30

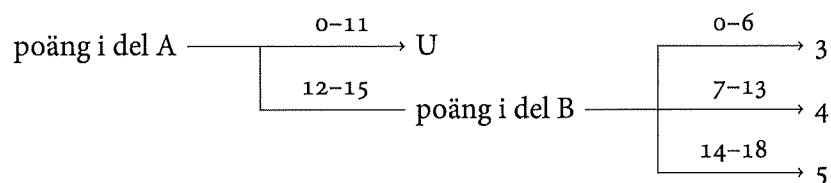
Examinator: Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar, del A och del B.

Del A består av 5 frågor à 3 poäng (totalt 15 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om de grundläggande begrepp och procedurer som behandlas på kursen. **De kräver endast korta svar, såsom en uträkning, en kort text eller ett diagram.** Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

Del B består av 3 frågor à 6 poäng (totalt 18 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om kursens mera avancerade begrepp och procedurer samt din problemlösningsförmåga. **De kräver utförliga redovisningar med korrekt notation och terminologi.** Frågorna i denna del är ordnade i stigande svårighetsgrad.

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Lycka till!

Del A

01 Logik och mängdlära

- a) Avgör om följande satser är logiskt ekvivalenta. Använd sanningsvärdestabeller. Skriv en kolumn för varje delsats, även för de delsatser som du tycker är triviala.

$$\neg p \wedge \neg q \qquad \neg(p \vee q)$$

- b) Avgör om följande satser är tautologier, kontradiktioner eller ingendera.

i) $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (\neg q)$

ii) $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

- c) Tre mängder A, B, C är givna sådana att

- $|A \setminus (B \cup C)| = 7$
- $|B \setminus (A \cup C)| = 8$
- $|C \setminus (A \cup B)| = 5$
- $|A \cap B \cap C| = 1$
- $|(B \cap C) \setminus A| = 3$
- $|(A \cap C) \setminus B| = 2$
- $|(A \cap B) \setminus C| = 10$
- $|(A \cup B \cup C)^c| = 6$

Rita ett venndiagram för de tre mängderna. Skriv in rätt antal element i vardera sektor av venndiagrammet. Bestäm sedan antalet element i

i) $B \cup C$

ii) $B \cap C$

02 Rekursion och induktion

- a) Uttrycket $5 + 12 + \dots + 537$ är en aritmetisk summa.
- Hur många termer finns i summan?
 - Beräkna summans värde.
- b) Uttrycket $2 + 4 + \dots + 1024$ är en geometrisk summa.
- Hur många termer finns i summan?
 - Beräkna summans värde.
- c) Använd induktion för att visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n + n^2}{2}$$

03 Talteori

- a) Ange alla (positiva) delare till talet 60. Ringa in de delare som är primtal.
- b) Vilken månad har vi om 277 månader?
- c) Två tal heter *relativt prima* om deras största gemensamma delare är 1. Avgör om följande talpar är relativt prima.
- 10 och 21
 - 432 och 585

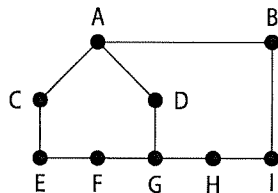
04 Kombinatorik och sannolikhetslära

Svara med ett konkret tal eller ett förenklat bråk, inte med en formel!

- a) Fram till 2019 bestod ett svenskt registrerings skylt av tre bokstäver följt av tre siffror mellan 0 och 9. Från årsskiftet kan det sista tecknet även vara en bokstav. Med vilken faktor skulle antalet möjliga registrerings skyltar öka om man även tillät det nästsista tecknet vara en bokstav? Antag att det finns 30 bokstäver och att alla möjliga teckenkombinationer är tillåtna.
- b) Från en grupp på 10 personer ska fyra väljas. På hur många sätt kan detta göras om ordningen
- i) spelar roll
 - ii) inte spelar roll
- c) Du drar två kort ur en kortlek (52 kort fördelade på fyra färger: spader, hjärter, ruter, klöver).
- i) Vad är sannolikheten att det första kortet är hjärter?
 - ii) Antag att det första kortet är hjärter. Vad är då sannolikheten att även det andra kortet är hjärter?
 - iii) Vad är sannolikheten att båda korten är hjärter?

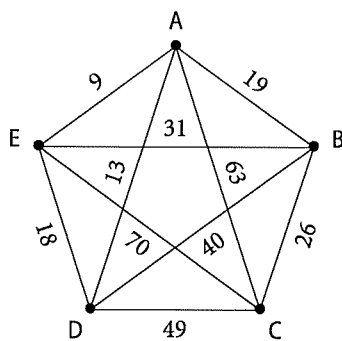
05 Grafteori

a) Här är en graf:



- i) Ange en Eulerväg genom grafen, eller svara "finns ej".
- ii) Vad är det minsta antalet bågar som du behöver lägga till i grafen för att skapa en Eulercykel? Mellan vilka noder måste dessa bågar i så fall gå?

b) Här är en viktad graf:



- i) Använd närmaste granne-metoden för att finna en Hamiltoncykel i grafen som börjar i nod A. Ange även cykelns totalkostnad.
 - ii) Använd Kruskals algoritm för att finna ett minimalt uppspannande träd i grafen. Ange även trädets totalkostnad.
- c) Ett *träd* är som bekant en sammanhängande graf utan cykler.
- i) Vad händer om man lägger till en båge till ett träd?
 - ii) Vad händer om man tar bort en båge från ett träd?

Del B

06 Avancerad induktion

- a) Visa med hjälp av induktion att följande gäller för alla naturliga tal $n > 1$:

$$5^n + 10 < 6^n$$

- b) Fibonaccis talföljd definieras genom den rekursiva formeln $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ med startvärdena $F_1 = 1$ och $F_2 = 1$. Använd den starka versionen av induktion för att visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$F_n < 2^n$$

07 Magi med tal

Välj ett godtyckligt tvåsiffrigt tal a . Talet ska vara större än noll.

- a) Skriv ner talet a två gånger efter varandra, så att du får ett fyrsiffrigt tal. Jag "gissar" att det nya talet är delbart med 101. Förklara varför jag har rätt.
- b) Skriv nu ner talet a tre gånger efter varandra, så att du får ett sexsiffrigt tal. Nu "gissar" jag att det nya talet är delbart med 259. Förklara varför jag har rätt. Ange ett annat tresiffrigt tal som jag hade kunnat "gissa".
- c) Antag att jag hade bett dig att skriva ner talet a fyra gånger efter varandra istället för tre, så att du hade fått ett åttasiffrigt tal. Förklara varför jag i detta fall inte borde ha "gissat" 259. Ange även ett tal som hade fungerat.

08 Rysk roulette

Rysk roulette är ett potentiellt dödligt spel där en spelare laddar en revolver med en enda kula, snurrar revolvertrumman för att slumpa i vilken position det skarpa skottet hamnar, riktar pipan mot sin egen tinning och trycker av. I denna uppgift ska du utgå ifrån att revolvern har sex skott, att en snurrning av trumman ger samma sannolikhet till varje position, och att ett tryck på avtryckaren roterar trumman till nästa position (och alltid i samma riktning).

a) Vad är chansen att överleva n "försök" i rad för $n = 1, \dots, 6$

i) om man snurrar trumman före varje försök?

ii) utan omsnurrning av trumman?

Svara med bråk och motivera ditt svar.

b) Du har hamnat i händerna på en ond maffiaboss. Hen laddar sin revolver med två kulor i *intelligande kamrar*. De andra fyra kamrarna förblir tomma. Hen snurrar trumman, riktar vapnet mot taket och trycker av. Ingenting händer. Hen riktar sedan vapnet mot dig och frågar: "Nu ska jag trycka av en andra gång. Vill du att jag gör det direkt eller ska jag snurra innan?" Vilket val ger dig större chanser att överleva detta makabra spel? Motivera ditt svar.

c) Hur förändras sannolikheterna för de två valen om maffiabossen laddar två *slumpmässigt utvalda kamrar* (inte nödvändigtvis intelligande kamrar) av revolvertrumman? Motivera ditt svar.