

# Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings universitet



Datum för tentamen	2019-08-26
Sal (1)	<u>TER1(10)</u>
Tid	8-12
Utb. kod	TDP015
Modul	TEN1
Utb. kodnamn/benämning Modulnamn/benämning	Grunder i matematik och logik Skriftlig tentamen
Institution	IDA
Antal uppgifter som ingår i tentamen	8
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Marco Kuhlmann
Telefon under skrivtiden	013-284644
Besöker salen ca klockan	endast telefonjour
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	Veronica Kindeland Gunnarsson, 013-285634, veronica.kindeland.gunnarsson@liu.se
Tillåtna hjälpmedel	inga
Övrigt	-/-
Antal exemplar i påsen	

## Tentamen 2019-08-26

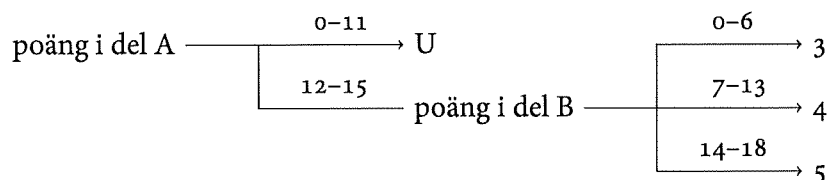
Examinator: Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar, del A och del B.

**Del A** består av 5 frågor à 3 poäng (totalt 15 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om de grundläggande begrepp och procedurer som behandlas på kursen. **De kräver endast korta svar, såsom en uträkning, en kort text eller ett diagram.** Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

**Del B** består av 3 frågor à 6 poäng (totalt 18 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om kursens mera avancerade begrepp och procedurer samt din problemlösningsförmåga. **De kräver utförliga redovisningar med korrekt notation och terminologi.** Frågorna i denna del är ordnade i stigande svårighetsgrad.

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



**Lycka till!**

## Del A

### 01 Logik och mängdlära

- a) Avgör om följande satser är logiskt ekvivalenta. Använd sanningsvärdestabeller. Skriv en kolumn för varje delsats, även för de delsats som du tycker är triviala.

$$p \leftrightarrow q \qquad (p \rightarrow q) \wedge (p \vee \neg q)$$

- b) Avgör om följande satser är tautologier, kontradiktioner eller ingendera.

i)  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow q$

ii)  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$

- c) För mängderna  $A$ ,  $B$  och  $C$  gäller att

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 6\} \qquad B = \{n \in A \mid n \bmod 2 = 0\} \qquad C = A \setminus B$$

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

i)  $A \subseteq B$

iii)  $\emptyset \in C$

ii)  $C = A \cup B$

iv)  $|B| = |C|$

## 02 Rekursion och induktion

- a) En aritmetisk talföljd beskrivs genom  $a_1 = 3$  och  $d = 6$ .
- Bestäm  $a_{21}$ .
  - Bestäm  $\sum_{k=1}^{21} a_k$ .
- b) Här är en geometrisk talföljd: 3, 6, 12, ...
- Bestäm  $a_{10}$ .
  - Bestäm  $\sum_{k=1}^{10} a_k$ .
- c) Visa med hjälp av induktion att följande gäller för alla naturliga tal  $n \geq 0$ . Redovisa utförligt (induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg)!

$$\sum_{i=1}^n (2i) = n^2 + n$$

## 03 Talteori

- Lista alla primtal upp till och med 75.
- Vilken månad har vi om 333 månader?
- Använd Euklides' algoritm för att finna största gemensamma delaren till talen 238 och 510. Visa att du kan utföra Euklides' algoritm.

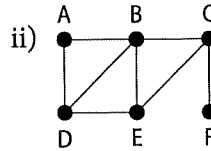
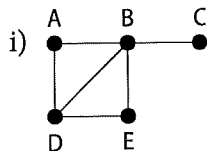
04 Kombinatorik och sannolikhetslära

Svara med ett konkret tal eller ett förenklat bråk, inte med en formel!

- a) Du drar kort från en vanligt kortlek (52 kort). Hur många kort behöver du dra för att vara säker på att du har dragit minst två kort av samma färg (spader, hjärter, ruter, klöver)?
- b) Från en grupp på 10 personer ska tre väljas. På hur många sätt kan detta göras om ordningsföljden
- i) spelar roll
  - ii) inte spelar roll
- c) I en möjängfabrik tillverkas 60% av möjängerna vid maskin 1 och de övriga vid maskin 2. Maskinerna tillverkar en viss andel defekta möjänger; denna andel är 6% för maskin 1 och 3% för maskin 2. En kund påträffar en defekt möjäng. Hur stor är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin 2?

05 Grafteori

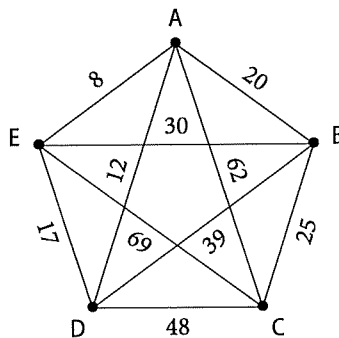
a) Avgör om grafen innehåller någon Eulerväg och visa i så fall hur den kan se ut.



b) En graf som inte innehåller några cykler kallas *skog*. Avgör om följande påståenden stämmer. Om ditt svar är "nej", rita ett motexempel.

- i) Varje träd är en skog.
- ii) Varje skog är ett träd.
- iii) Läger man till en båge till en skog får man en cyklisk graf.
- iv) Tar man bort en båge från en skog får man en osammanhängande graf.

c) Här är en viktad graf:



- i) Använd närmaste granne-metoden för att finna en Hamiltoncykel i grafen som börjar i nod A. Ange även cykelns totalkostnad.
- ii) Använd Kruskals algoritm för att finna ett minimalt uppspannande träd i grafen. Ange även trädets totalkostnad.

## Del B

### 06 Avancerad induktion

- a) Visa med hjälp av induktion att följande gäller för alla naturliga tal  $n > 1$ :

$$5^n + 10 < 6^n$$

- b) Fibonaccis talföljd definieras genom den rekursiva formeln  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  med startvärdena  $F_1 = 1$  och  $F_2 = 1$ . Använd den starka versionen av induktion för att visa att följande gäller för alla naturliga tal  $n \geq 1$ :

$$F_n < 2^n$$

### 07 Magi med tal

Välj ett godtyckligt tvåsiffrigt tal  $a$ . Talet ska vara större än noll.

- a) Skriv ner talet  $a$  två gånger efter varandra, så att du får ett fyrsiffrigt tal. Jag "gissar" att det nya talet är delbart med 101. Förklara varför jag har rätt.
- b) Skriv nu ner talet  $a$  tre gånger efter varandra, så att du får ett sexsiffrigt tal. Nu "gissar" jag att det nya talet är delbart med 259. Förklara varför jag har rätt. Ange ett annat tresiffrigt tal som jag hade kunnat "gissa".
- c) Antag att jag hade bett dig att skriva ner talet  $a$  fyra gånger efter varandra istället för tre, så att du hade fått ett åttasiffrigt tal. Förklara varför jag i detta fall inte borde ha "gissat" 259. Ange även ett tal som hade fungerat.

## 08 Rysk roulette

Rysk roulette är ett potentiellt dödligt spel där en spelare laddar en revolver med en enda kula, snurrar revolvertrumman för att slumpa i vilken position det skarpa skottet hamnar, riktar pipan mot sin egen tinning och trycker av. I denna uppgift ska du utgå ifrån att revolvern har sex skott, att en snurrning av trumman ger samma sannolikhet till varje position, och att ett tryck på avtryckaren roterar trumman till nästa position (och alltid i samma riktning).

a) Vad är chansen att överleva  $n$  "försök" i rad för  $n = 1, \dots, 6$

i) om man snurrar trumman före varje försök?

ii) utan omsnurrning av trumman?

Svara med bråk och motivera ditt svar.

b) Du har hamnat i händerna på en ond maffiaboss. Hen laddar sin revolver med två kulor i *intelligande kamrar*. De andra fyra kamrarna förblir tomma. Hen snurrar trumman, riktar vapnet mot taket och trycker av. Ingenting händer. Hen riktar sedan vapnet mot dig och frågar: "Nu ska jag trycka av en andra gång. Vill du att jag gör det direkt eller ska jag snurra innan?" Vilket val ger dig större chanser att överleva detta makabra spel? Motivera ditt svar.

c) Hur förändras sannolikheterna för de två valen om maffiabossen laddar två *slumpmässigt utvalda kamrar* (inte nödvändigtvis intelligande kamrar) av revolvertrumman? Motivera ditt svar.